CVIČENÍ Z ALGEBRY PRO 1. ROČNÍK (I)

Petr Emanovský
Jan Kühr

Předmluva

Skriptum navazuje na učební text D. Horta a J. Rachůnka „Algebra I" (Olomouc, 2003) a je tedy určeno především posluchačům prvního ročníku učitelství matematiky, ale pochopitelně může posloužit i studentům jiných oborů, kde se přednášejí základy (lineární) algebry.

Sbírka je rozdělena do šesti kapitol: 1. Zobrazení a algebraické struktury, 2. Matice a determinanty, 3. Soustavy lineárních rovnic, 4. Vektorové prostory, 5. Homomorfismy vektorových prostorů a 6. Eukleidovské vektorové prostory. Obsah tedy v podstatě pokrývá předmět Algebra 1 (KAG/MALG1) a část předmětu Algebra 2 (KAG/MALG2), kde dosud obdobný materiál pro cvičení chyběl. Typické příklady jsou vždy podrobně vyřešeny, výsledky a návody ke cvičením čtenář najde na konci každé kapitoly. Často také opakujeme základní pojmy.

V celém textu používáme standardní symboliku. Připomeňme zde alespoň, že $\mathbb{N}$ značí množinu všech přirozených čísel, $\mathbb{Z}$ je množina všech celých čísel, $\mathbb{Q}$ množina všech racionálních čísel, $\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel a $\mathbb{C}$ množina všech komplexních čísel; $\mathbb{Z}_n$ značí množinu zbytkových tříd modulo n. Kartézský součin množin $A_1, \dots, A_n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) značíme $A_1 \times \cdots \times A_n$; pokud $A_1 = \cdots = A_n = A$, pak stručně píšeme A^n místo $A \times \cdots \times A$. Symbol $A \subset B$ znamená, že A je vlastní podmnožina B, tj. $A \subseteq B$ a $A \neq B$.

Za cenné rady a připomínky děkujeme oběma recenzentům, doc. dr. R. Halašovi a dr. B. Růžičkové z Pedagogické fakulty UP.

Autoři

Obsah

1

Zobrazení a algebraické struktury

1.1 Zobrazení

Je-li $f\colon A \to B$ zobrazení množiny A do množiny B, pak zápis $f\colon a \mapsto b$ znamená $f(a) = b$. Množinu všech zobrazení množiny A do množiny B budeme značit B^A.

Příklad 1.1.1.

(a) Ukažte, že zobrazení $f\colon x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$ je bijekce množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ na otevřený interval $(-1, 1)$.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že zobrazení $g\colon x \mapsto 2\frac{x-a}{b-a} - 1$ je bijekce (a, b) na $(-1, 1)$.

(c) S využitím (a), (b) dokažte, že existuje bijekce $\mathbb{R}$ na libovolný otevřený interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (pro $a < b$).

Řešení. (a) Snadno se ověří, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $-1 < \frac{x}{|x|+1} < 1$.

Dokážeme, že f je injekce. Předpokládejme, že pro některá $x, y \in \mathbb{R}$ je $f(x) = f(y)$, tj. $\frac{x}{|x|+1} = \frac{y}{|y|+1}$. Zřejmě čísla x a y mají stejné znaménko, a proto z rovnosti $x|y| + x = y|x| + y$ dostaneme $x = y$.

Zbývá ukázat, že f je surjekce, tj. pro libovolné $y \in (-1, 1)$ najdeme $x \in \mathbb{R}$ tak, aby $y = f(x) = \frac{x}{|x|+1}$. Rozlišíme dva případy:

1) Jestliže $0 \le y < 1$, pak $x \ge 0$, a tedy $y = \frac{x}{x+1}$, odkud $x = \frac{y}{1-y}$. Snadno se ověří, že skutečně $f(\frac{y}{y-1}) = y$.

2) Pokud $-1 < y < 0$, pak také $x < 0$, a proto $y = \frac{x}{-x+1}$, odkud $x = \frac{y}{1+y}$. Pak $\left|\frac{y}{1+y}\right| = \frac{-y}{1+y}$ a platí $f(\frac{y}{1+y}) = y$.

(b) Jestliže $a < x < b$, pak $-1 < 2\frac{x-a}{b-a} - 1 < 1$, tedy g je zobrazení (a, b) do $(-1, 1)$. Abychom ukázali, že g je injekce, předpokládejme, že $g(x) = g(y)$ pro $x, y \in (a, b)$. Pak $2\frac{x-a}{b-a} - 1 = 2\frac{y-a}{b-a} - 1$, odkud plyne $x = y$. Nyní nechť $y \in (-1, 1)$. Hledáme $x \in (a, b)$ takové, že $y = g(x) = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$. Dostaneme $x = \frac{b-a}{2}(y + 1) + a$. Tedy g je surjekce.

(c) Podle (b) víme, že g je bijekce (a, b) na $(-1, 1)$, a proto inverzní relace g^{-1} je bijekcí $(-1, 1)$ na (a, b). Složené zobrazení $f \circ g^{-1}$ je tedy bijekce $\mathbb{R}$ na (a, b). $\square$

P o z n á m k a. Uvědomte si, že surjektivita zobrazení $f\colon A \to B$ závisí na množině B. Je-li $B \subset B'$, pak můžeme f chápat jako zobrazení A do B', přičemž pokud f je surjekcí A na B, pak už není surjekcí A na B'. Např. bereme-li f z příkladu 1.1.1 (a) jako zobrazení $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, pak nejde o surjekci.

Příklad 1.1.2. Nechť A je množina a $\mathscr{P}(A) = \{X\colon X \subseteq A\}$ její potenční množina. Dokažte, že neexistuje bijekce A na $\mathscr{P}(A)$.

Řešení. Předpokládejme, že $f\colon A \to \mathscr{P}(A)$ je bijekce. (Všimněte si, že pro každé $a \in A$ je $f(a) \subseteq A$.) Položme $B = \{a \in A\colon a \notin f(a)\}$. Potom $f(b) = B$ pro některé $b \in A$, protože $B \subseteq A$ a f je bijekce. Je zřejmé, že $b \in B$, právě když $b \notin f(b) = B$, což je spor. Tedy bijekce f neexistuje. □

Cvičení

1.1.1. Určete vlastnosti následujích zobrazení:

(a) $f_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f_1(x+yi) = x$;

(b) $f_2\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $f_2(x+yi) = (x,y)$;

(c) $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_3((x,y)) = (x+1, y, x)$;

(d) $f_4\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_4((x,y,z)) = (x-y, x-2y, x-3z)$;

(e) $f_5\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_5((x_1,\dots,x_n)) = x_1 + \dots + x_n$;

(f) $f_6\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_6((x_1,x_2,\dots,x_n)) = (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_n)$.

1.1.2. Určete vlastnosti zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ v závislosti na $a, b \in \mathbb{R}$. (Zobrazení f je lineární funkce. Projděte si ostatní základní elementární funkce jedné reálné proměnné a určte jejich vlastnosti.)

1.1.2: Pro $a = 0$ je f konstantní funkce $x \mapsto b$, tedy není injektivní, ani surjektivní. Pro $a \neq 0$ je f bijekce.

1.1.3. Nechť A a B jsou konečné neprázdné množiny. Najděte nutnou a postačující podmínku pro existenci

(a) injekce $f\colon A \to B$,

(b) surjekce $f\colon A \to B$,

(c) bijekce $f\colon A \to B$.

P o z n á m k a. Všimněte si, že jsou-li A, B konečné neprázdné množiny, pak podle cvičení 1.1.3 (a), (c) je nutnou a postačující podmínkou pro existenci bijekce $f\colon A \to B$ existence injekcí $g\colon A \to B$ a $h\colon B \to A$. Obecně platí tzv. **Cantor-Bernsteinova věta:** *Nechť A, B jsou množiny. Jestliže existuje injekce $g\colon A \to B$ a injekce $h\colon B \to A$, pak existuje bijekce A na B.*

1.1.4. Nechť A je neprázdná *konečná* množina a $f\colon A \to A$ zobrazení. Ukažte, že je-li f injekce nebo surjekce, pak f je už nutně bijekce.

P o z n á m k a. Pro nekonečné množiny obdoba cvičení 1.1.4 *neplatí*. Např. v příkladu 1.1.1 (a) jsme ukázali, že zobrazení $f\colon x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$ je bijekce $\mathbb{R}$ na interval $(-1,1)$, tedy f je injekce $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která není bijekcí.

P o z n á m k a. Zřejmě pokud A je konečná množina, pak neexistuje bijekce na žádnou její vlastní podmnožinu B (tj. $B \subseteq A$ a $B \neq A$). Příklad 1.1.1 ovšem ukazuje, že pro nekonečné množiny je situace jiná. Existence bijekce na vlastní podmnožinu je dokonce jednou z možností, jak definovat pojem nekonečné množiny: *Množina A je nekonečná, když existuje bijekce f množiny A na některou její vlastní podomnožinu B.*

P o z n á m k a. Bijekce slouží k porovnávání tzv. *mohutnosti* množin (mohutnost konečné množiny je počet prvků množiny). Existují bijekce $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$ i na $\mathbb{Q}$, tedy všechny tři množiny mají stejnou mohutnost. Na druhou stranu neexistuje bijekce $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$, tj. mohutnost $\mathbb{R}$ je ostře větší než mohutnost $\mathbb{Q}$. Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel má stejnou mohutnost jako $\mathbb{R}$.

Podle příkladu 1.1.1 (c) existuje bijekce $\mathbb{R}$ na každý otevřený interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Protože platí $(a,b) \subseteq [a,b]$, podle Cantor-Bernsteinovy věty existuje bijekce uzavřeného intervalu $[a,b]$ na $\mathbb{R}$. Tedy pro $a < b$ mají intervaly (a,b) i $[a,b]$ mohutnost $\mathbb{R}$.

1.1.5. Nechť A a B jsou konečné neprázdné množiny. Určete počet všech zobrazení $f\colon A \to B$.

P o z n á m k a. Jediným zobrazením $f\colon \varnothing \to B$ (B je zde libovolná množina) je prázdná relace $\varnothing$, neboť $f \subseteq \varnothing \times B = \varnothing$.

Pokud ale $A \neq \varnothing$, pak zobrazení $f\colon A \to \varnothing$ neexistuje, protože jediná podmnožina $A \times \varnothing = \varnothing$ je prázdná množina, která není zobrazením, protože v případě $A \neq \varnothing$ nesplňuje podmínku $\forall a \in A\ \exists b \in \varnothing;\ (a,b) \in \varnothing$.

1.1.6. Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ jsou zobrazení. Dokažte, že

(a) je-li složené zobrazení $f \circ g\colon A \to C$ injekce, pak f je injekce,

(b) je-li $f \circ g\colon A \to C$ surjekce, pak g je surjekce,

(c) je-li $f \circ g$ bijekce, potom f je injekce a g surjekce.

1.1.7. Nechť f, g, h jsou zobrazení neprázdné množiny A do sebe. Dokažte, že

(a) je-li h injekce, pak z $f \circ h = g \circ h$ plyne $f = g$,

(b) je-li h surjekce, pak z $h \circ f = h \circ g$ plyne $f = g$.

1.1.8. Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to A$ jsou zobrazení taková, že $f \circ g\colon A \to A$ a $g \circ f\colon B \to B$ jsou identická zobrazení. Dokažte, že pak f a g jsou vzájemně inverzní bijekce.

1.2 Grupoidy

Příklad 1.2.1. Na množině $\mathbb{R}$ definujme binární operaci $\wedge$ takto:

$$x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

Určete vlastnosti grupodu $(\mathbb{R}, \wedge)$.

Řešení. Definice operace je zřejmě korektní. Také je evidentní, že $x \wedge y = y \wedge x$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, tj. $\wedge$ je komutativní. Zjistíme, zda je i asociativní. Snadno se vidí, že $(x \wedge y) \wedge z = \min\{x, y, z\} = x \wedge (y \wedge z)$ (výsledkem je vždy nejmenší z čísel x, y, z). Tedy $(\mathbb{R}, \wedge)$ je komutativní pologrupa.

Nyní předpokládejme, že $e \in \mathbb{R}$ je neutrálním prvkem $(\mathbb{R}, \wedge)$, tj. $x \wedge e = x = e \wedge x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To ovšem znamená, že e by bylo největším reálným číslem, spor. Proto $(\mathbb{R}, \wedge)$ neutrální prvek nemá. □

Příklad 1.2.2. Na intervalu $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \leq x \leq 1\}$ definujme operaci $\oplus$:

$$x \oplus y = \min\{x + y, 1\}.$$

Vyšetřete vlastnosti grupoidu $([0, 1], \oplus)$.

Řešení. S využitím příkladu 1.2.1 můžeme psát $x \oplus y = (x + y) \wedge 1$. Okamžitě vidíme, že $x \oplus y = y \oplus x$ pro každé $x, y \in [0, 1]$. Snadno se přesvědčíme, že platí $(x \wedge y) + z = (x + z) \wedge (y + z)$. Proto dostaneme $(x \oplus y) \oplus z = (((x + y) \wedge 1) + z) \wedge 1 = ((x + y + z) \wedge (1 + z)) \wedge 1 = (x + y + z) \wedge ((1 + z) \wedge 1) = (x + y + z) \wedge 1$ a analogicky $x \oplus (y \oplus z) = (x + ((y + z) \wedge 1)) \wedge 1 = ((x + y + z) \wedge (x + 1)) \wedge 1 = (x + y + z) \wedge 1$, tedy $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ a operace $\oplus$ je asociativní.

Neutálním prvkem je 0, neboť platí $x \oplus 0 = \min\{x + 0, 1\} = \min\{x, 1\} = x$ pro každé $x \in [0, 1]$. Tedy $([0, 1], \oplus)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem.

Zjistíme, zda ke všem prvkům existují symetrické prvky. Nechť $x \in [0, 1]$. Hledáme $y \in [0, 1]$ tak, aby platilo $x \oplus y = 0 = y \oplus x$, tj. $\min\{x + y, 1\} = 0$. Pak $x + y = 0$ a tedy $x = y = 0$. To znamená, že pro $0 \neq x \in [0, 1]$ symetrický prvek neexistuje.

Ukázali jsme, že $([0, 1], \oplus)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem (tj. monoid), které není grupa. □

Příklad 1.2.3. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, $a \in G$ pevně zvolený prvek. Definujme na G novou operaci $\odot$ takto:

$$x \odot y = x \cdot a^{-1} \cdot y.$$

Dokažte, že $(G, \odot)$ je grupa.

Řešení. Grupa $(G, \cdot)$ má jednotku e a inverzní prvek k prvku x je x^{-1}.

Asociativita operace $\odot$ se ověří snadným výpočtem: $(x \odot y) \odot z = (xa^{-1}y)a^{-1}z = xa^{-1}(ya^{-1}z) = x \odot (y \odot z)$.

Najdeme jednotkový prvek v $(G, \odot)$, tj. takový prvek $e' \in G$, že $x \odot e' = x = e' \odot x$. Z rovnosti $x = x \odot e' = xa^{-1}e'$ dostaneme $a = ax^{-1}x = ax^{-1}xa^{-1}e' = e'$. Protože platí také $a \odot x = aa^{-1}x = x$ pro každé $x \in G$, je $e' = a$ jednotkový prvek $(G, \odot)$.

Zbývá najít inverzní prvky. Pro libovolné $x \in G$ hledáme $x^* \in G$ tak, aby $x \odot x^* = a = x^* \odot x$. Tedy $a = x \odot x^* = xa^{-1}x^*$, odkud dostaneme $ax^{-1}a = ax^{-1}xa^{-1}x^* = x^*$. Platí i $(ax^{-1}a) \odot x = ax^{-1}aa^{-1}x = a$, a proto $x^* = ax^{-1}a$ je inverzní prvek k prvku x v $(G, \odot)$.

Celkem jsme ověřili, že $(G, \odot)$ je grupa. Je zřejmé, že když grupa $(G, \cdot)$ je komutativní, pak je komutativní také $(G, \odot)$. □

Příklad 1.2.4. Na kartézském součinu $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujme operaci $*$:

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b).$$

Vyšetřete $(\mathbb{R}^2, *)$ a $(A, *)$, kde $A = \{(a, b)\colon a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

Řešení. Operace $*$ není komutativní, neboť $(a, b)*(c, d) = (ac, ad+b)$, ale $(c, d)*(a, b) = (ca, cb+d)$. Je ovšem asociativní, protože $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (ac, ad + b) * (e, f) = (ace, acf + ad + b)$ a rovněž $(a, b)*((c, d)*(e, f)) = (a, b)*(ce, cf + d) = (ace, acf + ad + b)$. Tedy $(\mathbb{R}^2, *)$ je nekomutativní pologrupa.

Najdeme neutrální prvek. Hledáme $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tak, aby platilo $(a, b) * (x, y) = (a, b) = (x, y) * (a, b)$ pro každé $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tj. $(a, b) = (ax, ay + b)$, odkud vyplývá $x = 1$ a $y = 0$. Platí $(a, b) * (1, 0) = (a, b) = (1, 0) * (a, b)$, a proto $(1, 0)$ je neutrálním prvkem.

Nakonec zjistíme, zda existují symetrické prvky. Symetrický prvek (x, y) k (a, b) by musel splňovat $(a, b) * (x, y) = (1, 0)$, tj. $(ax, ay + b) = (1, 0)$. Pro $a = 0$ taková čísla $x, y \in \mathbb{R}$ neexistují, proto $(\mathbb{R}^2, *)$ není grupa.

Celkem $(\mathbb{R}^2, *)$ je nekomutativní pologrupa s neutrálním prvkem (monoid), ale není grupa.

Nyní se zaměříme na $(A, *)$. Pokud $(a, b), (c, d) \in A$ (tj. $a \neq 0$, $c \neq 0$), pak $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b) \in A$, protože $ac \neq 0$. Tedy $*$ je operace na A. Jak jsme již ukázali, je $*$ asociativní a má neutrální prvek $(1, 0) \in A$, a proto i $(A, *)$ je nekomutativní pologrupa s neutrálním prvkem. Na rozdíl od $(\mathbb{R}^2, *)$ je ale $(A, *)$ grupa, protože pro $a \neq 0$ z rovnosti $(ax, ay + b) = (a, b) * (x, y) = (1, 0)$ dostaneme $x = \frac{1}{a}$ a $y = -\frac{b}{a}$. Platí $(a, b) * (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (1, 0) = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) * (a, b)$, a tedy $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ je symetrický prvek k prvku $(a, b) \in A$.

Celkem je $(A, *)$ nekomutativní grupa. □

Příklad 1.2.5. Zvolme pevně $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b < 1$, a na uzavřeném intervalu $[0, 1]$ definujme binární operaci $\otimes$ takto:

$$x \otimes y = \begin{cases} 0 & \text{když } x \leq a \ \&\ y \leq b, \\ \min\{x, y\} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dokažte, že $([0, 1], \otimes)$ je nekomutativní pologrupa s jednotkovým prvkem 1, která ale není grupa.

Řešení. Jistě $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$ pro každé $x \in [0,1]$. Nekomutativita je také evidentní, neboť $a \otimes b = 0$, ale $b \otimes a = a$. Dále je zřejmé, že $([0,1], \otimes)$ nemůže být grupa, jelikož $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$ pro každé $x \in [0,1]$, a tedy pro 0 neexistuje inverzní prvek.

Důkaz asociativity operace $\otimes$ provedeme rozborem možných případů pro $x, y, z \in [0,1]$:

1) $x, y, z \leq a$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = 0 = (x \otimes y) \otimes z$.

2) $x, y, z > a$: V tomto případě $x \otimes (y \otimes z) = \min\{x, \min\{y, z\}\} = \min\{x, y, z\} = \min\{\min\{x, y\}, z\} = (x \otimes y) \otimes z$.

3) $x \leq a$ & $y, z > a$: Rozlišíme další 4 podpřípady:

   α) $y, z \leq b$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes \min\{y, z\} = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = 0 \otimes z = 0$.
   β) $y \leq b < z$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes y = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = 0 \otimes z = 0$.
   γ) $z \leq b < y$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes z = 0$.
   δ) $b < y, z$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes \min\{y, z\} = x$ a $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes z = x$.

4) $y \leq a$ & $x, z > a$:

   α) $x, z \leq b$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes 0 = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = y \otimes z = 0$.
   β) $x \leq b < z$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes y = y$ a $(x \otimes y) \otimes z = y \otimes z = y$.
   γ) $z \leq b < x$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes 0 = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = y \otimes z = 0$.
   δ) $b < x, z$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes y = y$ a $(x \otimes y) \otimes z = y \otimes z = y$.

5) $z \leq a$ & $x, y \geq a$:

   α) $x, y \leq b$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = z$ a $(x \otimes y) \otimes z = \min\{x, y\} \otimes z = z$.
   β) $x \leq b < y$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = z$ a $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes z = z$.
   γ) $y \leq b < x$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = z$ a $(x \otimes y) \otimes z = y \otimes z = z$.
   δ) $b < x, y$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = z$ a $(x \otimes y) \otimes z = \min\{x, y\} \otimes z = z$.

6) $x, y \leq a$ & $z > a$:

   α) $z \leq b$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes 0 = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = 0 \otimes z = 0$.
   β) $b < z$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes y = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = 0 \otimes z = 0$.

7) $x, z \leq a$ & $y > a$:

   α) $y \leq b$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = 0 \otimes z = 0$.
   β) $b < y$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes z = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes z = 0$.

8) $y, z \leq a$ & $x > a$: Pak $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes 0 = 0$ a $(x \otimes y) \otimes z = y \otimes z = 0$.

$\square$

Příklad 1.2.6. Nechť $\mathcal{A}$ je množina všech *aditivních* reálných funkcí jedné proměnné, tj. zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Na $\mathcal{A}$ definujme sčítání „po bodech“:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x). \tag{1.2.1}$$

Dokažte, že $(\mathcal{A}, +)$ je komutativní grupa.

Řešení. Nejprve ukážeme, že součet dvou aditivních funkcí je opět aditivní funkce. Když $f, g \in \mathcal{A}$, pak $(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$, tedy $f + g \in \mathcal{A}$.

Dál je nutné ukázat, že sčítání funkcí definované vztahem (1.2.1) je asociativní a komutativní. Nechť $f, g, h \in \mathcal{A}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $((f+g)+h)(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g+h))(x)$, a tedy $(f+g)+h = f+(g+h)$. Obdobně $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$, tj. $f+g = g+f$.

Neutrálním prvkem je konstantní funkce $o\colon x \mapsto 0$, neboť $(f+o)(x) = f(x)+o(x) = f(x) + 0 = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě také $o \in \mathcal{A}$.

Snadno se ověří, že pro každou aditivní funkci $f \in \mathcal{A}$ je zobrazení $-f$ dané předpisem $(-f)(x) = -f(x)$ opět aditivní a je to opačný prvek k f, tj. $f + (-f) = o$.

Tím jsme dokázali, že $(\mathcal{A}, +)$ je komutativní grupa. □

Cvičení

1.2.1. Na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel definujme binární operace $\vee$ a $\wedge$ takto:

$$x \vee y = \max\{x, y\}, \qquad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

Jaké vlastnosti mají grupoidy $(\mathbb{Z}, \vee)$, $(\mathbb{Z}, \wedge)$, $(\mathbb{N}, \vee)$ a $(\mathbb{N}, \wedge)$?

1.2.2. Na množině všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ definujme operaci $*$ takto:

$$x * y = \frac{x+y}{2}.$$

Vyšetřete vlastnosti grupoidu $(\mathbb{Q}, *)$.

1.2.3. Sestavte tabulky operace $\otimes$ z příkladu 1.2.5 na množině $\{0, a, b, c, 1\} \subseteq [0,1]$ pro případy 1) $a < b < c$, 2) $a < c < b$ a 3) $c < a < b$.

1.2.4. Nechť A je množina a $\mathscr{P}(A) = \{X\colon X \subseteq A\}$ její potenční množina.

(a) Jaké vlastnosti mají grupoidy $(\mathscr{P}(A), \cup)$, $(\mathscr{P}(A), \cap)$ a $(\mathscr{P}(A), \setminus)$?

(b) Na $\mathscr{P}(A)$ definujme *symetrickou diferenci* $\div$ takto:

$$X \div Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Určete vlastnosti $(\mathscr{P}(A), \div)$.

(c) Vytvořte $(\mathscr{P}(A), \div)$ pro $A = \{a, b\}$.

1.2.5. Nechť $(S, \cdot)$ je pologrupa a $e \notin S$ nový prvek, který nepatří do S. Na množině $S \cup \{e\}$ zavedeme operaci $\odot$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} x \odot y &= x \cdot y && \text{pro } x, y \in S, \\ x \odot e &= e \odot x = x && \text{pro } x \in S \cup \{e\}. \end{aligned}$$

Ukažte, že $(S \cup \{e\}, \odot)$ je pologrupa s neutrálním prvkem e.

1.2.6. Nechť $(G, \cdot)$ je konečná pologrupa s jednotkou e. Dokažte, že $(G, \cdot)$ je grupa, právě když její tabulka má následující vlastnost:

($*$) V každém řádku i každém sloupci je každý prvek právě jedenkrát.

1.2.7. Napište všechny tabulky operace $\cdot$ na množině G tak, aby $(G, \cdot)$ byla grupa s jednotkou e pro:

(a) $G = \{e, a\}$,

(b) $G = \{e, a, b\}$,

(c) $G = \{e, a, b, c\}$.

1.2.8. Nechť $A = \{(a, b)\colon a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Definujme binární operaci $\circ$ na A takto:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

Vyšetřete vlastnosti $(A, \circ)$.

1.2.9. Vyšetřete vlastnosti grupoidů $(\mathbb{R}, \oplus)$ a $(\mathbb{R}, \odot)$, kde

$$x \oplus y = x + y + 1, \quad x \odot y = x + y + xy.$$

1.2.10. Nechť $(G, \cdot)$ je grupoid. Řekneme, že prvek $a \in G$ je *idempotentní*, jestliže $a \cdot a = a$. Dokažte, že když $(G, \cdot)$ je grupa, pak jediným idempotentním prvkem je jednotka e.

1.2.11. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa. Dokažte, že pokud $a \cdot a = e$ pro každé $a \in G$, pak grupa $(G, \cdot)$ je komutativní.

1.2.12. Komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ se nazývá *n-tá odmocnina* z 1 ($n \in \mathbb{N}$), pokud $z^n = 1$. Dokažte, že množina všech n-tých odmocnin z 1 tvoří vzhledem k obvyklému násobení komplexních čísel komutativní grupu.

1.2.13. Zjistěte, zde množina všech komplexních jednotek (tj. čísel $z \in \mathbb{C}$ takových, že $|z| = 1$) tvoří vzhledem k násobení komplexních čísel grupu.

1.2.14. Nechť A je neprázdná množina. Nechť S_A je množina všech *permutací na* A (tj. bijekcí $f\colon A \to A$). Ukažte, že vzhledem ke skládání zobrazení tvoří S_A grupu $(S_A, \circ)$; tato grupa se nazývá *symetrická grupa* množiny A. Pro $A = \{1, 2, \dots, n\}$ označme množinu všech permutací na A symbolem S_n. Kolik prvků má S_n? Sestavte tabulky symetrických grup $(S_2, \circ)$ a $(S_3, \circ)$. Dokažte, že pro $n \geq 3$ je grupa $(S_n, \circ)$ nekomutativní.

1.2.15. Nechť A je neprázdná množina. Nechť A^A je množina všech zobrazení $f\colon A \to A$. Určete vlastnosti $(A^A, \circ)$, kde $\circ$ je operace skládání zobrazení. Kolik prvků má A^A pro $A = \{1, 2, \dots, n\}$? Sestavte tabulky pro $A = \{1\}$ a $A = \{1, 2\}$.

1.2.16. Nechť $A(\mathbb{R})$ je množina všech permutací na $\mathbb{R}$, které navíc splňují podmínku

$$\forall x, y \in \mathbb{R}; \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Určete vlastnosti $(A(\mathbb{R}), \circ)$.

1.2.17. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa a $a \in G$. Zobrazení $f_a\colon x \mapsto a^{-1}xa$ se nazývá *vnitřní automorfismus* grupy G určený prvkem a. Označme $Int(G)$ množinu všech vnitřních automorfismů grupy G, tj. $Int(G) = \{f_a\colon a \in G\}$. Dokažte, že vzhledem ke skládání zobrazení je $Int(G)$ grupa.

1.2.18. Sestrojte grupu symetrií (= zákrytových pohybů)

(a) obdélníka (který není čtverec),

(b) rovnostranného trojúhelníka,

(c) čtverce.

P o z n á m k a. Grupa symetrií rovnostranného trojúhelníka je symetrická grupa tří prvků $(S_3, \circ)$ (viz cvičení 1.2.14), ale grupa symetrií čtverce *není* symetrická grupa $(S_4, \circ)$, protože S_4 má $4! = 24$ prvků. Tedy grupa symetrií čtverce je grupou pouze některých permutací čtyřprvkové množiny.

1.2.19. Označme M množinu všech matic ve tvaru

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Vyšetřete strukturu $(M, \cdot)$, kde operace $\cdot$ je násobení matic.

1.2.20. Dokažte, že v grupoidu $(G, \cdot)$ existuje nejvýše jeden neutrální prvek a nejvýše jeden agresivní prvek (tj. $a \in G$ takové, že $ax = a = xa$ pro každé $x \in G$). Navíc je-li $(G, \cdot)$ pologrupa s neutrálním prvkem, pak ke každému prvku existuje nejvýše jeden symetrický prvek.

1.2.21. Dokažte, že pologrupa $(G, \cdot)$ je grupa, právě když pro každé $a, b \in G$ existují $x, y \in G$ tak, že $ax = b$ a $ya = b$.

1.2.22. Na kartézském součinu $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definujme sčítání následujícím způsobem:

$$(k_1, \ell_1, m_1) + (k_2, \ell_2, m_2) = \begin{cases} (k_1 + k_2, \ell_1 + \ell_2, m_1 + m_2) & \text{pro } m_1 \text{ sudé,} \\ (k_1 + \ell_2, \ell_1 + k_2, m_1 + m_2) & \text{pro } m_1 \text{ liché.} \end{cases}$$

Dokažte, že $(\mathbb{Z}^3, +)$ je nekomutativní grupa.

1.2.23. Nechť f je aditivní reálná funkce (viz příklad 1.2.6). Dokažte, že $f(qx) = qf(x)$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$ a $x \in \mathbb{R}$.

1.2.24. Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, $n \in \mathbb{N}$. Na množině $G^n = G \times \cdots \times G$ definujme binární operaci takto:

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n).$$

Dokažte, že $(G^n, \cdot)$ je grupa, která je komutativní, kdykoliv $(G, \cdot)$ je komutativní.

1.2.25. Na kartézském součinu $\mathbb{R}^2$ definujme operaci $*$ následujícím způsobem:

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 e^{x_2} + y_2).$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}^2, *)$ je nekomutativní grupa.

1.3 Okruhy

Příklad 1.3.1. Nechť $\mathcal{M}$ je množina všech reálných funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takových, že $f(0) = 0$. Na $\mathcal{M}$ definujeme součet a součin funkcí obvyklým způsobem, tj.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{a} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

pro $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ je komutativní unitární okruh, který není obor integrity.

Řešení. 1) Nejprve dokážeme, že $(\mathcal{M}, +)$ je komutativní grupa. Jestliže $f, g \in \mathcal{M}$ (tj. $f(0) = g(0) = 0$), pak $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, tedy $f + g \in \mathcal{M}$. Z definice operace $+$ je ihned vidět komutativita, neboť $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy $f+g = g+f$. Snadno se ověří i asociativita: pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $((f+g)+h)(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = (f+(g+h))(x)$, tj. $(f + g) + h = f + (g + h)$. Funkce o definovaná předpisem $o(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ jistě patří do $\mathcal{M}$ a splňuje $o + f = f = f + o$ pro každou funkci $f \in \mathcal{M}$, protože $(o+f)(x) = o(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x)$. Proto $o \in \mathcal{M}$ je nulovým prvkem pologrupy $(\mathcal{M}, +)$. Konečně pro každé $f \in \mathcal{M}$ je opačným prvkem funkce $-f \in \mathcal{M}$ definovaná předpisem $(-f)(x) = -f(x)$. Opravdu, $(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0 = o(x)$, tedy $f + (-f) = o$.

2) Dál ukážeme, že $(\mathcal{M}, \cdot)$ je komutativní pologrupa. Pro $f, g \in \mathcal{M}$ platí $(fg)(0) = f(0)g(0) = 0$, tedy $fg \in \mathcal{M}$. Komutativita a asociativita se ověří přímo podle definice násobení obdobně jako v bodě 1. Najdeme jednotkový prvek. Je to funkce $e \in \mathcal{M}$

taková, že $fe = f$ pro každé $f \in \mathcal{M}$. Platí tedy $f(x) = (fe)(x) = f(x)e(x)$, tj. $f(x)(e(x) - 1) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Je proto zřejmé, že funkce e je dána předpisem

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

3) Zbývá dokázat, že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. Nechť $f, g, h \in \mathcal{M}$. Pak $((f+g)h)(x) = (f+g)(x)h(x) = (f(x)+g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x) = (fh)(x) + (gh)(x) = ((fh) + (gh))(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a proto $(f+g)h = (fh) + (gh)$. Protože násobení je komutativní, není v tomto případě nutné ověřovat druhý distributivní zákon.

Celkem jsme dokázali, že $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ je komutativní unitární okruh. Není to však obor integrity, protože obsahuje netriviální dělitele nuly. Např. následující funkce f, g (načrtněte si grafy!) jsou nenulové (tj. $f \neq o$ a $g \neq o$), ale platí $fg = o$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1, \\ x - 1 & \text{jinak,} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } x \leq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

□

Příklad 1.3.2. Nechť

$$\mathbb{Z}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \colon a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \text{a} \quad \mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \colon a, b \in \mathbb{Q}\},$$

kde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vyšetřete $(\mathbb{Z}(\varepsilon), +, \cdot)$ a $(\mathbb{Q}(\varepsilon), +, \cdot)$; operace $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení komplexních čísel.

Řešení. Nejprve si všimneme, že $\varepsilon^3 = 1$ a $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 - \varepsilon$.

Nechť $a + b\varepsilon, c + d\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$. Pak $a + b\varepsilon + c + d\varepsilon = a + c + (b + d)\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$. Sčítání $+$ je komutativní a asociativní, nulovým prvkem je $0 = 0 + 0\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$ a pro každé $a + b\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$ je $-a - b\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$ opačným prvkem. Tedy $(\mathbb{Z}(\varepsilon), +)$ je komutativní grupa.

Dál pro $a + b\varepsilon, c + d\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$ platí $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + bd\varepsilon^2 + (ad + bc)\varepsilon = ac + bd(-1 - \varepsilon) + (ad + bc)\varepsilon = ac - bd + (ad + bc - bd)\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$. Násobení je komutativní a asociativní, jednotkový prvek je $1 = 1 + 0\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$. Tedy $(\mathbb{Z}(\varepsilon), \cdot)$ je komutativní pologrupa s jednotkou.

Násobení je jistě také distributivní vzhledem ke sčítání, a proto $(\mathbb{Z}(\varepsilon), +, \cdot)$ je komutativní unitární okruh, který navíc neobsahuje netriviální dělitele nuly. Je to tedy (číselný) obor integrity.

Nyní rozhodneme, zda $(\mathbb{Z}(\varepsilon), +, \cdot)$ je těleso, tj. zjistíme, jestli pro každé $0 \neq a + b\varepsilon \in \mathbb{Z}(\varepsilon)$ existuje inverzní prvek v $\mathbb{Z}(\varepsilon)$. Tímto inverzním prvkem by bylo číslo $\frac{1}{a+b\varepsilon}$. Platí

$$\frac{1}{a + b\varepsilon} = \frac{1}{a + b\varepsilon} \cdot \frac{a + b\varepsilon^2}{a + b\varepsilon^2} = \frac{a + b\varepsilon^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a - b - b\varepsilon}{a^2 - ab + b^2} =$$
$$= \frac{a - b}{a^2 - ab + b^2} + \frac{-b}{a^2 - ab + b^2}\varepsilon.$$

Vidíme, že obecně $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}, \frac{-b}{a^2-ab+b^2} \notin \mathbb{Z}$, a proto $\frac{1}{a+b\varepsilon} \notin \mathbb{Z}(\varepsilon)$. Tedy $(\mathbb{Z}(\varepsilon), +, \cdot)$ není těleso.

V případě $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ analogicky dokážeme, že $(\mathbb{Q}(\varepsilon), +, \cdot)$ obor integrity. Ovšem pro $0 \neq a + b\varepsilon \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ jsou $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$ a $\frac{-b}{a^2-ab+b^2}$ racionální čísla, tedy $\frac{1}{a+b\varepsilon} \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ a $(\mathbb{Q}(\varepsilon), +, \cdot)$ je těleso. □

Příklad 1.3.3. Nechť M je množina všech matic tvaru

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R}, \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \text{ kde } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Zjistěte, jakou strukturu tvoří M vzhledem ke sčítání a násobení matic.

Řešení. a) Nechť $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2b & a \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ 2d & c \end{smallmatrix}\right) \in M$. Zřejmě $A + B \in M$. Sčítání matic je komutativní a asociativní, nulovým prvkem je nulová matice $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M$ a pro každou matici $A \in M$ také opačná matice $-A = \left(\begin{smallmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{smallmatrix}\right)$ patří do M, tedy $(M, +)$ je komutativní grupa.

Dál platí $A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2bc+2ad & 2bd+ac \end{smallmatrix}\right) \in M$. Násobení matic je asociativní, jednotkou je jednotková matice $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M$. Vidíme, že $A \cdot B = B \cdot A$, proto $(M, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jednotkou.

Obecně je násobení matic distributivní vzhledem ke sčítání matic, tj. $(M, +, \cdot)$ je komutativní unitární okruh.

Zjistíme, zda je to obor integrity. Kdyby $A \cdot B = N$, pak $ad + bc = 0$ a $ac + 2bd = 0$. Pro $a \neq 0 \neq c$ dostaneme $d = -\frac{bc}{a}$ a $0 = ac - \frac{2b^2c}{a} = c\frac{a^2-2b^2}{a}$. Tedy pokud $a^2 = 2b^2$ a $d = -\frac{bc}{a}$, pak $A \cdot B = N$, např. $\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{smallmatrix}\right) = N$. To znamená, že M obsahuje netriviální dělitele nuly a není proto oborem integrity ani tělesem.

b) Stejně jako v bodě a) se dokáže, že $(M, +, \cdot)$ je komutativní unitární okruh. Ukážeme, že v tomto případě je to dokonce těleso, tj. pro libovolnou matici $A \in M$, $A \neq N$ (tj. $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$) najdeme inverzní prvek. Hledáme matici $X = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 2y & x \end{smallmatrix}\right) \in M$ takovou, že $A \cdot X = J$. Pak musí platit $ax + 2by = 1$ a $ay + bx = 0$. Pro $a \neq 0$ dostaneme $y = -\frac{bx}{a}$ a $1 = ax - \frac{2b^2x}{a} = x\frac{a^2-2b^2}{a}$. Protože $a, b \in \mathbb{Q}$, platí $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (neboť $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), a tudíž $x = \frac{a}{a^2-2b^2}$, odkud $y = \frac{-b}{a^2-2b^2}$. Stejné x, y dostaneme i v případě, že $b \neq 0$, tedy inverzním prvkem k matici A v M je matice

$$\frac{1}{a^2 - 2b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}.$$

Tím jsme dokázali, že $(M, +, \cdot)$ je komutativní těleso. □

Cvičení

1.3.1. Zjistěte, jaké struktury tvoří následující množiny vzhledem k obvyklému sčítání a násobení komplexních čísel:

(a) $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$,

(b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$,

(c) $\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1.3.2. Označme

$$\mathbb{Z}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \colon a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \text{a} \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukažte, že $(\mathbb{Z}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je nejmenší číselný obor integrity obsahující $\sqrt{3}$ a $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je nejmenší číselné těleso obsahující $\sqrt{3}$.

1.3.3. Na $\mathbb{R}$ definujme operace $\oplus$ a $\odot$ takto:

$$x \oplus y = x + y + 1, \qquad x \odot y = x + y + xy.$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ je komutativní těleso.

1.3.4. Nechť $\mathcal{M}$ je množina všech reálných funkcí $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují podmínku $f(0) = 0$. Vyšetřete strukturu $(\mathcal{M}, +, \circ)$, kde součet $+$ je definován předpisem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$ a operace $\circ$ je skládání zobrazení.

1.3.5. Nechť $\mathcal{M}$ je množina všech spojitých reálných funkcí $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vyšetřete strukturu

(a) $(\mathcal{M}, +, \cdot)$,

(b) $(\mathcal{M}, +, \circ)$,

kde $+$ a $\cdot$ jsou sčítání a násobení definované v příkladu 1.3.1 a $\circ$ je skládání zobrazení.

1.3.6. Nechť $\mathcal{A}$ je množina všech aditivních reálných funkcí (viz příklad 1.2.11). Zjistěte, zda vzhledem ke sčítání a násobení reálných funkcí definovanému „po bodech“ tvoří $\mathcal{A}$ okruh.

1.3.7. Doplňte tabulku násobení tak, aby struktura $(\{0, 1, a, b\}, +, \cdot)$ byla těleso:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	.	.
b	0	b	.	.

1.3.8. Doplňte tabulku z cvičení 1.3.7 tak, aby vznikl okruh, který není těleso.

1.3.9. Určete vlastnosti následujících dvou okruhů:

(a)

$+$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	1	a	b	c	x	y	z
1	1	0	x	z	y	a	c	b
a	a	x	0	c	b	1	z	y
b	b	z	c	0	a	y	x	1
c	c	y	b	a	0	z	1	x
x	x	a	1	y	z	0	b	c
y	y	c	z	x	1	b	0	a
z	z	b	y	1	x	c	a	0

$\cdot$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	x	y	z
a	0	a	a	b	c	0	b	c
b	0	b	b	c	a	0	c	a
c	0	c	c	a	b	0	a	b
x	0	x	0	0	0	x	x	x
y	0	y	b	c	a	x	z	1
z	0	z	c	a	b	x	1	y

(b)

$+$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	1	a	b	c	x	y	z
1	1	0	x	z	y	a	c	b
a	a	x	0	c	b	1	z	y
b	b	z	c	0	a	y	x	1
c	c	y	b	a	0	z	1	x
x	x	a	1	y	z	0	b	c
y	y	c	z	x	1	b	0	a
z	z	b	y	1	x	c	a	0

$\cdot$	0	1	a	b	c	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	x	y	z
a	0	a	b	z	1	c	x	y
b	0	b	z	y	a	1	c	x
c	0	c	1	a	x	y	z	b
x	0	x	c	1	y	z	b	a
y	0	y	x	c	z	b	a	1
z	0	z	y	x	b	a	1	c

1.3.10. Nechť M je množina všech matic tvaru

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Zjistěte, jakou strukturu tvoří M vzhledem ke sčítání a násobení matic.

1.3.11. Nechť A je neprázdná množina a $\mathscr{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ její potenční množina. Určete vlastnosti struktury $(\mathscr{P}(A), \div, \cap)$, kde

$$X \div Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

1.3.12. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dokažte, že $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$, $0 < a < n$, je netriviální dělitel nuly v okruhu $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ zbytkových tříd modulo n, právě když čísla a, n jsou soudělná.

1.3.13. Dokažte, že okruh zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$, $n \geq 2$, je obor integrity, právě když n je prvočíslo.

1.3.14. Dokažte, že v oboru integrity lze krátit nenulovým prvkem, tj. jestliže $ac = bc$ a $c \neq 0$, pak $a = b$.

1.3.15. Dokažte, že okruh zbytkových tříd $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$, $n \geq 2$, je těleso, právě když n je prvočíslo.

1.3.16. Nechť $(M, +, \cdot)$ je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Na kartézském součinu $M^n = M \times \cdots \times M$ definujme operace $+$ a $\cdot$ „po složkách“, tj.

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),\\ (a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n).\end{aligned}$$

(a) Dokažte, že $(M^n, +, \cdot)$ je okruh. Navíc když $(M, +, \cdot)$ je komutativní nebo unitární, potom také $(M^n, +, \cdot)$ je komutativní, resp. unitární.

(b) Předpokládejme, že $(M, +, \cdot)$ je těleso (resp. obor integrity). Rozhodněte, zda $(M^n, +, \cdot)$ je těleso (resp. obor integrity).

P o z n á m k a. Všechna tělesa, s nimiž jsme se dosud setkali, byla komutativní. Lze dokázat, že každé *konečné* těleso je komutativní, ale nekonečná tělesa obecně komutativní nejsou. Ukažme si proto na závěr příklad nekomutativního tělesa:

Příklad 1.3.4. Na kartézském součinu $\mathbb{K} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ definujme sčítání a násobení následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 y_1 - x_2 \overline{y}_2, x_1 y_2 + x_2 \overline{y}_1),\end{aligned} \qquad (\star)$$

kde $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ značí čísla komplexně sdružená. Dokažte, že $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je nekomutativní těleso s nulovým prvkem $(0, 0)$ a jednotkovým prvkem $(1, 0)$. Toto těleso se nazývá *těleso kvaternionů*.

Řešení. Snadno se ukáže, že $(\mathbb{K}, +)$ je komutativní grupa (viz cvičení 1.2.24); nulovým prvkem je jistě $(0, 0)$, opačným prvkem k (x_1, x_2) je $(-x_1, -x_2)$. Přímým výpočtem se také ověří asociativita násobení a jeho distributivita vzhledem ke sčítání. Tedy $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je okruh. Násobení není komutativní, protože např. $(i, 0) \cdot (0, 1) = (0, i)$, ovšem $(0, 1) \cdot (i, 0) = (0, -i)$.

Zbývá ukázat, že $(\mathbb{K} \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ je grupa. Jednotkou je zřejmě $(1, 0)$. Inverzním prvkem k $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ je $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$, platí-li $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (1, 0) = (y_1, y_2) \cdot (x_1, x_2)$. Z první rovnosti dostaneme podmínku $x_1 y_1 - x_2 \overline{y}_2 = 1$ a $x_1 y_2 + x_2 \overline{y}_1 = 0$, odkud $y_1 = \frac{\overline{x}_1}{x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2}$ a $y_2 = \frac{-x_2}{x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2}$. Snadno se přesvědčíme, že $\left(\frac{\overline{x}_1}{x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2}, \frac{-x_2}{x_1 \overline{x}_1 + x_2 \overline{x}_2}\right)$ je skutečně inverzním prvkem k (x_1, x_2).

Celkem jsme dokázali, že $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je nekomutativní těleso. □

Všimněme si, že těleso kvaternionů $\mathbb{K}$ vznikne z tělesa komplexních čísel $\mathbb{C}$ stejným způsobem, jakým $\mathbb{C}$ vznikne z tělesa reálných čísel $\mathbb{R}$.

Komplexní čísla lze chápat jako uspořádané dvojice reálných čísel (reálná čísla identifikujeme s dvojicemi $(x, 0)$, dvojice $(0, 1)$ reprezentuje imaginární jednotku i). Obvyklé sčítání a násobení v $\mathbb{C}$ potom odpovídá operacím v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ daným vztahem $(\star)$ (pro reálná čísla y_1, y_2 samozřejmě máme $\overline{y}_1 = y_1$ a $\overline{y}_2 = y_2$). Jinými slovy, těleso komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ může zkonstruovat tak, že na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zavedeme operace $+, \cdot$ předpisem $(\star)$.

Těleso $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je vytvořeno analogicky z $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Platí $(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$, a proto můžeme prvky $(x, y) \in \mathbb{K}$ psát ve tvaru $x + yj$, kde $j = (0, 1)$. Navíc $x = a + bi$ a

$y = c+di$ pro někt. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a platí $(a,0)+(b,0)\cdot(i,0)+(c,0)\cdot(0,1)+(d,0)\cdot(0,i) = (a+bi, c+di)$, tedy místo $x + yj = a + bi + (c+di)j$ lze také psát $a+bi+cj+dk$, kde i identifikujeme s $(i, 0)$ a $k = (0,i) = (i,0)\cdot(0,1)$. Všimněte si, že $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ a $ik = -j$. Ověřte, že pro sčítání a násobení takto získaných výrazů (tzv. *kvaternionů*) platí

$$
\begin{aligned}
&(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = \\
&\qquad = a + a' + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k, \\
&(a + bi + cj + dk) \cdot (a' + b'i + c'j + d'k) = \\
&\qquad = aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + ba' + cd' - dc')i + \\
&\qquad\quad + (ac' + ca' - bd' + db')j + (ad' + da' + bc' - cb')k;
\end{aligned}
$$

inverzním prvkem k nenulovému kvaternionu $a + bi + cj + dk$ je kvaternion

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk).$$

1.4 Výsledky

1.1.1: (a) Surjekce, (b) bijekce, (c) injekce, (d) bijekce, (e) surjekce, (f) bijekce.

1.1.2: Pro $a = 0$ je f konstantní funkce $x \mapsto b$, tedy není injektivní, ani surjektivní. Pro $a \neq 0$ je f bijekce.

1.1.3: Označme $m = |A|$ a $n = |B|$. (a) Kdyby $m > n$, pak by $f(a_1) = f(a_2)$ pro některé $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Tedy $m \leq n$. (b) $m \geq n$. (c) $m = n$.

1.1.4: Označme $m = |A|$ a $n = |f(A)|$, kde $f(A) = \{f(a) \colon a \in A\}$; jistě $m \geq n$. Jestliže f je injekce, pak podle cvičení 1.1.3 máme $m \leq n$, tj. $m = n$ a f je bijekce. Analogicky pro případ, kdy f je surjekce.

1.1.5: Opět označíme $m = |A|$ a $n = |B|$. Každý prvek z m prvků množiny A se zobrazí na některý z n prvků množiny B, tedy celkový počet zobrazení je n^m.

1.1.6: (a) Jestliže $f(a_1) = f(a_2)$ pro některé $a_1, a_2 \in A$, pak $(f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (f \circ g)(a_2)$, odkud vyplývá $a_1 = a_2$.

(b) Každý prvek $c \in C$ lze psát ve tvaru $c = (f \circ g)(a) = g(f(a))$, kde $a \in A$ a $f(a) \in B$.

(c) Plyne přímo z (a) a (b).

1.1.7: (a) Pro každé $a \in A$, $h(f(a)) = (f \circ h)(a) = (g \circ h)(a) = h(g(a))$ odkud $f(a) = g(a)$, tj. $f = g$.

(b) Každý prvek $a \in A$ je tvaru $a = h(x)$ pro některé $x \in A$, proto $f(a) = f(h(x)) = (h \circ f)(x) = (h \circ g)(x) = g(h(x)) = g(a)$, tj. $f = g$.

1.1.8: Pokud $f(a_1) = f(a_2)$, pak $a_1 = (f \circ g)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (f \circ g)(a_2) = a_2$. Navíc pro každé $b \in B$ platí $b = (g \circ f)(b) = f(g(b))$, kde $g(b) \in A$. Tedy f je bijekce. Obdobně pro g.

1.2.1: Komutativní pologrupy, $(\mathbb{N}, \vee)$ má neutrální prvek 1, ostatní pologrupy neutrální prvek nemají.

1.2.2: Komutativní grupoid, který není pologrupa (např. $(0*1)*2 = \frac{5}{4}$, ale $0*(1*2) = \frac{3}{4}$) a nemá neutrální prvek (jestliže $x * e = x$, pak $e = x$).

1.2.3:

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\otimes$	0	a	c	b	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
c	0	a	c	b	c
b	0	a	c	b	b
1	0	a	b	c	1

$\otimes$	0	c	a	b	1
0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	c
a	0	0	0	0	a
b	0	c	a	b	b
1	0	a	b	c	1

1.2.4: (a) $(\mathscr{P}(A), \cup)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem $\varnothing$, $(\mathscr{P}(A), \cap)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem A. $(\mathscr{P}(A), \setminus)$ není komutativní, není pologrupa a nemá ani neutrální prvek.

(b) $(\mathscr{P}(A), \div)$ komutativní grupa – neutrální prvek $\varnothing$, symetrickým prvkem k $X \in \mathscr{P}(A)$ je X.

(c)

$\div$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

1.2.5: Pro $x, y, z \in S$ je $(x \odot y) \odot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \odot (y \odot z)$. Pokud jeden z prvků x, y, z je e, pak $(x \odot y) \odot z$ a $x \odot (y \odot z)$ se rovnají součinu ostatních dvou prvků.

1.2.6: Nechť G je grupa. Předpokládejme, že v některém řádku se některý prvek opakuje, tj. existují $x, y, z \in G$ tak, že $y \neq z$ a přitom $xy = xz$. Pak ale $y = x^{-1}xy = x^{-1}xz = z$, spor.

Naopak, předpokládejme, že G není grupa. Potom existuje prvek $x \in G$, který nemá inverzní prvek, a tedy v řádku (resp. sloupci) u x není jednotka e, což znamená, že některý prvek se v tomto řádku (resp. sloupci) opakuje. Tedy $(G, \cdot)$ nesplňuje podmínku $(*)$.

1.2.7:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	a
b	b	c	a	e
c	c	a	e	b

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

1.2.8: Nekomutativní grupa, neutrální prvek $(1, 0)$, symetrický prvek k (a, b) je $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$.

1.2.9: $(\mathbb{R}, \oplus)$ je komutativní grupa s neutrálním prvkem -1, symetrický prvek k x je $x-2$ (jde o speciální případ příkladu 1.2.3). $(\mathbb{R}, \odot)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem 0, pro $x \neq -1$ je symetrickým prvkem $\frac{-x}{x+1}$, pro $x = -1$ symetrický prvek neexistuje. Tedy $(\mathbb{R}, \odot)$ není grupa.

1.2.10: Je-li a idempotentní, pak $a = ae = aaa^{-1} = aa^{-1} = e$.

1.2.11: Každý prvek je sám k sobě inverzní, proto $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$.

1.2.12: Označme J_n množinu všech n-tých odmocnin z 1, tj. $z \in J_n$, právě když $z = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}$ pro některé $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pro $u, v \in J_n$ platí $(uv)^n = u^n v^n = 1$, tedy $(J_n, \cdot)$ je grupoid. Protože násobení v $\mathbb{C}$ je komutativní a asociativní a $1 \in J_n$, je jasné, že $(J_n, \cdot)$ je komutativní pologrupa s neutrálním prvkem 1. Navíc pokud $z \in J_n$, pak $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$, tedy $\frac{1}{z} \in J_n$ a proto $(J_n, \cdot)$ je komutativní grupa.

1.2.13: Platí $|uv| = |u||v|$ pro každé $u, v \in \mathbb{C}$. Označme J množinu všech komplexních jednotek. Potom pro $u, v \in J$ máme $|uv| = |u||v| = 1$, tj. $uv \in J$. Dál jestliže $z \in J$, pak $|\frac{1}{z}| = |z||\frac{1}{z}| = |z\frac{1}{z}| = |1| = 1$, tedy $\frac{1}{z} \in J$. Protože násobení komplexních čísel je komutativní a asociativní, je $(J, \cdot)$ komutativní grupa.

1.2.14: Složení permutací na A je permutace na A, skládání zobrazení je asociativní, neutrálním prvkem je identické zobrazení $id_A\colon x \mapsto x$ a pro každou permutaci na A existuje inverzní zobrazení, které je opět permutace na A. Tedy $(S_A, \circ)$ je grupa. Je jasné, že množina S_n má $n!$ prvků.

$(S_2, \circ)$ je dvouprvková grupa (viz cvičení 1.2.7 (a)), $(S_3, \circ)$ je šestiprvková grupa (viz cvičení 1.2.18 (b)).

Pro $n \geq 3$ stačí vzít např. permutace $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$ a $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$. Potom platí $f \circ g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$, ale $g \circ f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \cdots & n \end{smallmatrix}\right)$.

1.2.15: Pro $A = \{1\}$ je $(A^A, \circ)$ triviální (tj. jednoprvková) komutativní grupa. V ostatních případech je $(A^A, \circ)$ nekomutativní pologrupa s jednotkovým prvkem $id_A\colon x \mapsto x$. Pro $A = \{1, \ldots, n\}$ má A^A právě n^n prvků (viz cvičení 1.1.5). Prvky $\{1,2\}^{\{1,2\}}$ jsou zobrazení $id = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$:

$\circ$	id	f	g	h
id	id	f	g	h
f	f	f	h	h
g	g	f	id	h
h	h	f	f	h

1.2.16: Jestliže $f, g \in A(\mathbb{R})$, pak $f \circ g$ je opět permutace na $\mathbb{R}$. Navíc $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = g(f(x)) \leq g(f(y)) = (f \circ g)(y)$, tedy $f \circ g \in A(\mathbb{R})$. Jistě $id \in A(\mathbb{R})$ a $f^{-1} \in A(\mathbb{R})$ pro každé $f \in A(\mathbb{R})$. Skládání zobrazení je asociativní, proto $(A(\mathbb{R}), \circ)$ je grupa. Není komutativní: např. pro $f\colon x \mapsto x+1$ a $g\colon x \mapsto 2x$ platí $f \circ g\colon x \mapsto 2x+2$, ale $g \circ f\colon 2x+1$.

1.2.17: Pro každé $x \in G$ platí $(f_a \circ f_b)(x) = f_b(f_a(x)) = b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}xab = f_{ab}(x)$, tedy $f_a \circ f_b = f_{ab} \in Int(G)$. Jednotkou je identické zobrazení $id_G = f_e$, protože $f_a \circ f_e = f_{ae} = f_e$ a $f_e \circ f_a = f_a$ pro každé $f_a \in Int(G)$. Inverzním prvkem k $f_a \in Int(G)$ je $f_{a^{-1}}$, neboť $f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{aa^{-1}} = f_e$ a taky $f_{a^{-1}} \circ f_a = f_e$. Celkem $(Int(G), \circ)$ je grupa.

1.2.18: (a) Symetrie obdélníka $ABCD$ jsou identické zobrazení $1 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{smallmatrix}\right)$, dvě osové souměrnosti $2 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{smallmatrix}\right)$ a $3 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{smallmatrix}\right)$ a středová souměrnost $4 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{smallmatrix}\right)$. Potom

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

(b) Symetrie rovnostranného trojúhelníka ABC jsou identické zobrazení $1 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{smallmatrix}\right)$, osové souměrnosti $2 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{smallmatrix}\right)$, $3 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{smallmatrix}\right)$ a $4 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{smallmatrix}\right)$ a rotace

$5 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{smallmatrix}\right)$ a $6 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{smallmatrix}\right)$. Pak

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	6	5	4	3
3	3	5	1	6	2	4
4	4	6	5	1	3	2
5	5	3	4	2	6	1
6	6	4	2	3	1	5

(c) Symetrie čtverce jsou identita $1 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{smallmatrix}\right)$, osové souměrnosti $2 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{smallmatrix}\right)$, $3 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{smallmatrix}\right)$, $4 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{smallmatrix}\right)$ a $5 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{smallmatrix}\right)$, středová souměrnost $6 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{smallmatrix}\right)$ a rotace $7 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{smallmatrix}\right)$ a $8 = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{smallmatrix}\right)$. Pak

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	6	8	7	3	5	4
3	3	6	1	7	8	2	4	5
4	4	7	8	1	6	5	2	3
5	5	8	7	6	1	4	3	2
6	6	3	2	5	4	1	8	7
7	7	4	5	3	2	8	6	1
8	8	5	4	2	3	7	1	6

1.2.19: a) Komutativní grupa, b) nekomutativní grupa.

1.2.20: Jsou-li $e, e' \in G$ neutrální prvky, pak $e = ee' = e'$. Stejně pro agresivní prvky. Nechť $(G, \cdot)$ je pologrupa s neutrálním prvkem e. Předpokládejme, že $x^*, x^\#$ jsou symetrické prvky k prvku x. Pak $x^* = ex^* = (x^\# x)x^* = x^\#(xx^*) = x^\# e = x^\#$.

1.2.21: Jestliže $(G, \cdot)$ je grupa, stačí vzít $x = a^{-1}b$ a $y = ba^{-1}$.

Naopak, předpokládejme, že $(G, \cdot)$ je pologrupa, která má danou vlastnost. Zvolme $a \in G$ pevně. Existuje jediné $e \in G$ tak, že $ae = a$. Dál pro každé $b \in G$ existuje $y \in G$ takové, že $ya = b$; platí $be = yae = ya = b$. Obdobně existuje jediné $e' \in G$ takové, že $e'a = a$, a pro každé $b \in G$ platí $e'b = b$. Tedy potom $e = ee' = e'$ a tento prvek je neutrálním prvkem pologrupy $(G, \cdot)$. Zbývá ukázat, že pro libovolné $a \in G$ existuje symetrický prvek. Podle předpokladu existují prvky $x, y \in G$ takové, že $ax = e = ya$. Platí $x = ex = yax = ye = y$, a proto $x = y$ je symetrickým prvkem k prvku a. Tedy celkem $(G, \cdot)$ je grupa.

1.2.22: Přímým výpočtem ověříme, že platí $((k_1, \ell_1, m_1) + (k_2, \ell_2, m_2)) + (k_3, \ell_3, m_3) = (k_1, \ell_1, m_1) + ((k_2, \ell_2, m_2) + (k_3, \ell_3, m_3))$ (rozlišíme 4 případy: a) m_1 i m_2 sudé, b) m_1 sudé, m_2 liché, c) m_1 i m_2 liché, d) m_1 liché, m_2 sudé). Nulovým prvkem je $(0, 0, 0)$. Opačným prvkem k (k, ℓ, m) je

$$-(k, \ell, m) = \begin{cases} (-k, -\ell, -m) & \text{pro } m \text{ sudé}, \\ (-\ell, -k, -m) & \text{pro } m \text{ liché}. \end{cases}$$

Grupa není komutativní, např. $(1,1,1)+(1,-1,2)=(0,2,3)$, ale $(1,-1,2)+(1,1,1)=(2,0,3)$.

1.2.23: Pro každé $m \in \mathbb{N}$, $f(mx) = mf(x)$. Zřejmě $f(0) = 0$, protože pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(x) + f(0)$. Odtud $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, tj. $f(-x) = -f(x)$. Proto pro $m \in \mathbb{N}$ dostaneme $f(-mx) = -f(mx) = -mf(x)$. Celkem $f(mx) = mf(x)$ pro $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Nyní pro $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $mf(x) = f(mx) = f(nqx) = nf(qx)$, a proto $f(qx) = \frac{m}{n}f(x)$.

1.2.24: Snadno se ověří, že násobení v G^n je asociativní, protože je asociativní původní násobení v G: $((a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n))\cdot(c_1,\dots,c_n) = ((a_1b_1)c_1,\dots,(a_nb_n)c_n) = (a_1(b_1c_1),\dots,a_n(b_nc_n)) = (a_1,\dots,a_n)\cdot((b_1,\dots,b_n)\cdot(c_1,\dots,c_n))$. Je-li e jednotka v G, pak $(e,\dots,e)$ je jednotka G^n; inverzní prvek k $(a_1,\dots,a_n)$ v G^n je $(a_1^{-1},\dots,a_n^{-1})$.

1.2.25: Asociativita se ověří snadným výpočtem. Neutrálním prvkem je $(0,0)$. Symetrickým prvkem k (x,y) je $(-x,-ye^{-x})$. Nekomutativita: např. $(1,0)*(1,1) = (2,1)$, ale $(1,1)*(1,0) = (2,e)$.

1.3.1: (a), (b) Obory integrity, nejsou tělesa. (c) Není ani okruh, protože množina $\mathbb{Z}(\sqrt[3]{2})$ není uzavřená na násobení.

1.3.2: Nejprve se ukáže, že $\mathbb{Z}(\sqrt{3})$ je obor integrity. Jistě $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}(\sqrt{3})$. Předpokládejme, že M je libovolný číselný obor integrity, který obsahuje $\sqrt{3}$. Pak nutně $\mathbb{Z} \subseteq M$ (protože $1 \in M$) a M obsahuje všechna čísla ve tvaru $a + b\sqrt{3}$ $(a,b \in \mathbb{Z})$, tedy $\mathbb{Z}(\sqrt{3}) \subseteq M$. Analogicky pro $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

1.3.3: Podle cvičení 1.2.9 stačí ověřit, že $\odot$ je distributivní vzhledem k $\oplus$.

1.3.4: Stejně jako v příkladu 1.3.1 se ukáže, že $(\mathcal{M},+)$ je komutativní grupa. Pro $f,g \in \mathcal{M}$ platí $(f \circ g)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$, tj. $f \circ g \in \mathcal{M}$. Skládání zobrazení je asociativní, tedy $(\mathcal{M},\circ)$ je pologrupa. Neplatí ale pravý distributivní zákon $(f+g)\circ h = (f\circ h) + (g \circ h)$; stačí vzít např. funkci h danou předpisem $h(0) = 0$ a $h(x) = 1$ pro $x \neq 0$. Tedy $(\mathcal{M},+,\circ)$ není okruh.

1.3.5: (a) Je známo, že součet a součin dvou spojitých funkcí je spojitá funkce. Zbytek obdobně jako v příkladu 1.3.1. $(\mathcal{M},+,\cdot)$ je komutativní unitární okruh obsahující netriviální dělitele nuly. Jednotkou okruhu je konstantní funkce $e\colon x \mapsto 1$.

(b) Složením dvou spojitých funkcí opět dostáváme spojitou funkci, proto $(\mathcal{M},\circ)$ je pologrupa. Podobně jako ve cvičení 1.3.4 zde neplatí pravý distributivní zákon. Tedy $(\mathcal{M},+,\circ)$ není okruh.

1.3.6: Ne, součin dvou aditivních funkcí nemusí být aditivní.

1.3.7: $(\{1,a,b\},\cdot)$ musí být grupa, jediná možnost je tedy

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

1.3.8: Platí $ab = a(1 + a) = a + aa$, $ba = (1 + a)a = a + aa$ a $bb = (1 + a)b = b + ab = b + a + aa = 1 + aa$, stačí proto zvolit aa a ostatní součiny budou určeny jednoznačně. Existují 4 možnosti:

1. $aa = b$, $ab = ba = 1$, $bb = a$ (těleso z cvičení 1.3.7),
2. $aa = a$, $ab = ba = 0$, $bb = b$,
3. $aa = 0$, $ab = ba = a$, $bb = 1$,
4. $aa = 1$, $ab = ba = b$, $bb = 0$.

1.3.9: (a) Komutativní unitární okruh, kt. není obor integrity ani těleso; (b) komutativní těleso.

1.3.10: a) Není okruh, protože M není uzavřena na sčítání.

b) Komutativní unitární okruh, který není obor intergrity, neboť součin dvou nenulových matic může být nulová matice.

c) Komutativní těleso, inverzním prvkem k nenulové matici $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ je inverzní matice $\frac{1}{a^2+b^2}\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

1.3.11: Podle cvičení 1.2.4 je $(\mathscr{P}(A), \div)$ komutativní grupa s neutrálním prvkem $\emptyset$, $(\mathscr{P}(A), \cap)$ komutativní pologrupa s neutrálním prvkem A. Snadno se ověří platnost distributivních zákonů, tedy $(\mathscr{P}(A), \div, \cap)$ je komutativní unitární okruh. Není to obor integrity ani těleso, protože průnik dvou neprázdných množin může být prázdná množina.

1.3.12: Předpokládejme, že $NSD(a, n) = 1$. Jestliže $\bar{a} \odot \bar{b} = \bar{0}$, pak $\overline{ab} = \bar{0}$ a tedy $n|ab$, odkud vyplývá $n|b$, protože $NSD(a, n) = 1$. Proto $\bar{b} = \bar{0}$ a $\bar{a}$ není dělitel nuly.

Naopak, nechť $d = NSD(a, n) \neq 1$. Pak $a = dx$ a $n = dy$ pro někt. $x, y \in \mathbb{N}$. Kdyby $n|y$, pak $y = nz$ pro někt. $z \in \mathbb{N}$ a $n = dy = dnz$, odkud $1 = dz$, což ale odporuje předpokladu $d \neq 1$. Tedy $n \nmid y$ a $ay = dxy = nx$ a můžeme psát $\bar{a} \odot \bar{y} = \overline{ay} = \overline{nx} = \bar{0}$, kde $\bar{y} \neq \bar{0}$. Tedy $\bar{a}$ je netriviální dělitel nuly.

1.3.13: Podle cvičení 1.3.12 je $\bar{a} \neq \bar{0}$ dělitel nuly v $\mathbb{Z}_n$, právě když jsou a, n soudělná. Tedy $\mathbb{Z}_n$ neobsahuje dělitele nuly, právě když n je prvočíslo.

1.3.14: Je-li $ac = bc$, pak $0 = ac - bc = (a - b)c$, odkud plyne $a - b = 0$, tj. $a = b$, protože $c \neq 0$.

1.3.15: Je-li $\mathbb{Z}_n$ těleso, pak je to i obor integrity a podle cvičení 1.3.13 je n prvočíslo.

Naopak, předpokládejme, že n je prvočíslo. Potom $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ je obor integrity, a proto $(\mathbb{Z}_n \setminus \{\bar{0}\}, \odot)$ je pologrupa s jednotkovým prvkem $\bar{1}$. Stačí ukázat, že v každém řádku (resp. sloupci) tabulky této pologrupy je každý prvek právě jednou. Kdyby $\bar{a} \odot \bar{c} = \bar{b} \odot \bar{c}$ pro někt. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{\bar{0}\}$, pak $\bar{a} = \bar{b}$ podle cvičení 1.3.14. Tím je dokázáno, že $(\mathbb{Z}_n \setminus \{\bar{0}\}, \odot)$ je grupa.

1.3.16: (a) Přímé ověření axiomů. (b) Pro $n \geq 2$ nemůže být těleso ani obor integrity, protože vždy obsahuje dělitele nuly, např. $(a, 0, 0, \ldots, 0)$ a $(0, a, 0, \ldots, 0)$, kde $0 \neq a \in M$.

2

Matice a determinanty

2.1 Operace s maticemi

Příklad 2.1.1. Nad tělesem $\mathbb{R}$ jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda jsou definovány matice $A+B$, $C+D$, AB, CD, $2A+3CD$, C^2, C^2D^2, $A^T + B^T$, $(A+B)^T$. V kladném případě je určete.

Řešení. Matice $A + B$ existuje a platí

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+(-2) & 3+0 & -2+1 \\ -1+4 & 1+5 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Součet $C + D$ není definován, neboť C a D nejsou matice téhož typu. Součin AB není definován, protože počet sloupců matice A není roven počtu řádků matice B. Součin CD existuje a platí

$$CD = \begin{pmatrix} 3\cdot 10 + 0\cdot 2 & 3\cdot 0 + 0\cdot(-3) & 3\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 10 + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 + 1\cdot(-3) & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 3 \\ 12 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dále

$$\begin{aligned} 2A + 3CD &= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cdot 30 & 3\cdot 0 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 12 & 3\cdot(-3) & 3\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 & 0 & 9 \\ 36 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 & 6 & 5 \\ 34 & -7 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Matice C je čtvercová, proto

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Součin C^2D^2 neexistuje, neboť D není čtvercová, a tedy D^2 neexistuje. Transponovaná matice A^T vznikne z matice A záměnou řádků a sloupců, tj.

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (A+B)^T.$$

□

Příklad 2.1.2. Najděte všechny matice A nad $\mathbb{R}$, které jsou zaměnitelné s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Hledáme matice A takové, aby platilo $AB = BA$. Je tedy zřejmé, že A musí být čtvercová matice stupně 2, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\begin{pmatrix} 2a+3b & -4a+b \\ 2c+3d & -4c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-4c & 2b-4d \\ 3a+c & 3b+d \end{pmatrix},$$

tedy dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2a+3b &= 2a-4c, \\ -4a+b &= 2b-4d, \\ 2c+3d &= 3a+c, \\ -4c+d &= 3b+d. \end{aligned}$$

Z první a čtvrté rovnice získáme $3b = -4c$, ze druhé a třetí rovnice vyjádříme $b = -4a + 4d$ a $c = 3a - 3d$. Protože tato čísla b, c vyhovují podmínce $3b = -4c$, hledaná matice je ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & -4a+4d \\ 3a-3d & d \end{pmatrix},$$

kde $a, d \in \mathbb{R}$. □

Příklad 2.1.3. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Vypočtěte

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^3 = \left(\begin{smallmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)^4 = \left(\begin{smallmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{smallmatrix}\right)$. Indukcí se ověří, že

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Opravdu, předpokládáme-li platnost pro všechna $1 \le k < n$, potom

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{n-1} & (n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & (n-1)a^{n-1} + a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Cvičení

2.1.1. Vypočtěte následující součiny, pokud jsou definovány:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3, \quad \text{e)}\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5,$$

$$\text{f)}\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n, \quad \text{g)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad \text{h)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{324}, \quad \text{i)}\quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{725}.$$

2.1.2. Najděte všechny matice A nad $\mathbb{R}$ takové, že $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

2.2 Permutace

Příklad 2.2.1. Určete znaménko permutace

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

na množině $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a rozložte ji na transpozice.

Řešení. Počet inverzí v pořadí $(3 \ \ 5 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 2)$ je 6, tedy permutace P je sudá, tj. $\operatorname{sgn} P = 1$. Proto lze permutaci P rozložit na sudý počet transpozic. Tento rozklad můžeme dostat např. tak, že ze základního pořadí $(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5)$ postupně zleva poskládáme pořadí $(3 \ \ 5 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 2)$. Z pořadí $(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5)$ dostaneme pořadí $(3 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 5)$ transpozicí $(1, 3)$ (tj. vyměníme čísla 1 a 3). Pak z $(3 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 5)$ dostaneme $(3 \ \ 5 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 2)$ použitím transpozice $(2, 5)$ (tj. vyměníme čísla 2 a 5). Permutace P je tedy složením transpozic $(1, 3)$ a $(2, 5)$, tj. $P = (1, 3) \circ (2, 5)$. □

P o z n á m k a. Všimněte si, že získaný rozklad není jediný možný. Permutaci P lze rozložit i jiným způsobem, přičemž se zachová jen to, zda je počet transpozic sudý nebo lichý.

Cvičení

2.2.1. Určete počet inverzí v pořadí $(1\ \ 3\ \ 5\ \ \dots\ \ 2n-1\ \ 2\ \ 4\ \ 6\ \ \dots\ \ 2n)$.

2.2.2. Určete znaménko permutace $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ a rozložte ji na transpozice.

2.2.3. Najděte permutaci P na množině $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ takovou, aby

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ P \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2.4. Rozhodněte, zda následující součin je členem determinantu příslušného stupně:

a) $a_{13}a_{22}a_{34}a_{24}a_{41}a_{56}$, b) $a_{32}a_{51}a_{31}a_{45}a_{24}$, c) $a_{11}a_{24}a_{35}a_{42}a_{53}$.

2.3 Determinanty

Příklad 2.3.1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3}{=} (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{5}{=} (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{6}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{7}{=} (-1)^{1+2}\cdot(-2)\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 = 16.$$

Použili jsme následující úpravy:

1 – od 1. řádku odečteme 2. řádek,

2 – k 5. sloupci přičteme 1. sloupec,

3 – Laplaceův rozvoj podle prvků 1. řádku,

4 – 1. sloupec postupně odečteme od 2., 3. a 4. sloupce,

5 – Laplaceův rozvoj podle prvků 1. řádku,

6 – 1. řádek přičteme ke 2. a 3. řádku,

7 – Laplaceův rozvoj podle 2. sloupce

Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

můžeme vypočítat přímo užitím Sarrusova pravidla pro determinant 3. stupně takto:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 16.$$

□

Cvičení

2.3.1. Vypočtěte determinanty:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 4 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{e)} \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix} \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{h)} \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \text{i)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{j)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{k)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{l)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 2.3.2. Vypočtěte determinant n-tého stupně ($n \geq 2$):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{2}{=} (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x & x \\ 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix} \overset{3}{=} (-1) \cdot \begin{vmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (n-1) \cdot (-x)^{n-2} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}.$$

Použité úpravy:

1 – postupně 2. sloupec odečteme od třetího až n-tého sloupce,

2 – Laplaceův rozvoj podle 1. řádku,

3 – k 1. řádku přičteme postupně druhý až n-tý řádek.

□

Cvičení

2.3.2. Vypočtete determinanty n-tého stupně ($n \geq 2$):

a) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte následující determinant stupně n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Řešení. Výpočet determinantu n-tého stupně závisí na determinantech nižších stupňů, neboť odečtením prvního řádku od druhého a Laplaceovým rozvojem podle prvního sloupce dostáváme

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} = 2D_{n-1}.$$

Protože $D_1 = |2| = 2$, $D_2 = \left|\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{smallmatrix}\right| = 4$ atd., je zřejmé, že platí $D_n = 2^n$, což snadno ověříme matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$:
1) Pro $n = 1$ je $D_1 = 2 = 2^1$.
2) Předpokládejme, že $D_k = 2^k$ pro každé $k < n$. Potom $D_n = 2 \cdot D_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. □

Příklad 2.3.4. Nechť

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

je determinant je stupně $n \geq 2$. Ukažte, že platí

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1) Pro $n = 2$ máme $\left|\begin{smallmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{smallmatrix}\right| = -x^2 = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} x^2$.

2) Předpokládejme platnost tvrzení pro všechna přirozená čísla $2 \leq k < n$. Pak Laplaceův rozvoj D_n podle 1. řádku je

$$\begin{aligned} D_n = (-1)^{n+1} x D_{n-1} = (-1)^{n+1} x \underbrace{(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} x^{n-1}}_{D_{n-1}} = \\ = (-1)^{\frac{2n+2+n^2-3n+2}{2}} x^n = (-1)^{\frac{n^2-n+4}{2}} x^n = \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\frac{4}{2}} x^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n. \end{aligned}$$

□

Cvičení

2.3.3. Vypočtěte determinanty stupně $n \geq 2$:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

2.3.4. Vypočtěte následující determinant stutně $2n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

2.4 Hodnost matice

Příklad 2.4.1. Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 56 & 11 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 56 & 11 \\ 6 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 19 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 76 & 16 \\ 0 & -4 & -28 & -4 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 19 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Použili jsme tyto úpravy:

1 – dvojnásobek 2. řádku přičteme k 1. řádku, pětinásobek 2. řádku přičteme ke 3. řádku, trojnásobek 1. řádku odečteme od 4. řádku;

2 – vyměníme 1. a 2. řádek, 3. řádek přičteme ke 4. řádku a čtyřnásobek 1. řádku odečteme od 3. řádku;

3 – 1. řádek vynásobíme -1, 4. řádek vydělíme 4 a vyměníme jej s 3. řádkem;

4 – k 1. řádku přičteme 3. řádek, od 2. řádku odečteme čtyřnásobek 3. řádku;

5 – 3. řádek vydělíme 4 a trojnásobek odečteme od 2. řádku.

Takto jsme matici upravili na trojúhelníkový redukovaný tvar a vidíme, že hodnost matice A je tedy 3. Všimněte si, že již po druhé upravě je zřejmé, že $h(A) = 3$. □

Příklad 2.4.2. Určete hodnost matice A z příkladu 2.4.1 metodou vroubení subdeterminantu.

Řešení. Matice A je čtvercová a snadno se přesvědčíme, že $\det A = 0$ (je to vidět z výpočtu v příkladu 2.4.1), proto $h(A) < 4$. Musíme zjistit, zda A má nenulový subdeterminant stupně 3. Např.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 56 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -192.$$

(Ostatní subdeterminanty stupně 3 mohou být 0.) Tedy maximální stupeň nenulového subdeterminantu je 3, a proto $h(A) = 3$. □

Cvičení

2.4.1. Určete hodnosti matic (nad $\mathbb{C}$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1+2i & 1-i & 2+3i & 2 \\ 3+i & -2i & 5+i & 2-2i \\ 5i & 3-i & 1+8i & 4+2i \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.4.3. Určete hodnost matice v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -3 & -1 \\ 1 & 1 & a & a & 1 \\ a & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & a & a & b \end{pmatrix}.$$

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -3 & -1 \\ 1 & 1 & a & a & 1 \\ a & 3 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & a & a & b \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -3 & -1 \\ 1 & 1 & a & a & 1 \\ a-3 & 0 & 4-3a & 9-3a & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & a+3 & 2 \\ a+2 & 0 & 4+2a & -6-3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Použité úpravy:

1 – trojnásobek 2. řádku odečteme od 3. řádku, 2. řádek odečteme od 4. řádku,

2 – 1. řádek odečteme od 2. řádku a pětinásobek 1. řádku přičteme ke 3. řádku.

Nyní vidíme, že

$$h(A) = \begin{cases} 2 & \text{pro } b = 1, a = -2, \\ 3 & \text{pro } b \neq 1, a = -2, \\ 3 & \text{pro } b = 1, a \neq -2, \\ 4 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Alternativně můžeme postupovat následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix}1&0&a&-3&-1\\1&1&a&a&1\\a&3&4&9&8\\1&1&a&a&b\end{pmatrix}\overset{1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&a&-3&-1\\0&1&0&a+3&2\\a&3&4&9&8\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}$$

$$\overset{2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&a&-3&-1\\0&1&0&a+3&2\\0&3&4-a^2&9+3a&8+a\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}$$

$$\overset{3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&a&-3&-1\\0&1&0&a+3&2\\0&0&4-a^2&0&2+a\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}$$

Použité úpravy:

1 – od 2. řádku odečteme 1. řádek a od 4. řádku odečteme 2. řádek,

2 – za předpokladu, že $a \neq 0$, od 3. řádku odečteme a-násobek 1. řádku,

3 – od 3. řádku odečteme trojnásobek 2. řádku.

Vzhledem k tomu, že $4 - a^2 = (2 + a)(2 - a)$, jsou zřejmě hodnoty parametrů, které mohou ovlivnit hodnost matice A, $a = \pm 2$ a $b = 1$.

Ve druhém kroku jsme předpokládali $a \neq 0$, a proto musíme ještě vyřešit případ $a = 0$. Snadno se přesvědčíme, že pak $h(A) = 3$ pro $b = 1$ a $h(A) = 4$ pro $b \neq 1$. □

Příklad 2.4.4. Určete hodnost matice A v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix}2&-1&a&b\\1&a&-1&1\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$$

Řešení. Dvojnásobek 3. řádku odečteme od 1. řádku a 3. řádek odečteme od 2. řádku:

$$\begin{pmatrix}2&-1&a&b\\1&a&-1&1\\1&10&-6&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-21&a+12&b-2\\0&a-10&5&0\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$$

Jestliže $b \neq 2$, pak $h(A) = 3$. Pokud $b = 2$, pak $h(A) = 2$, právě když 1. a 2. řádek jsou lineárně závislé (tj. jeden je násobkem druhého), tedy když

$$\begin{aligned}a + 12 &= 5x\\-21 &= (a - 10)x\end{aligned}$$

pro některé $x \in \mathbb{R}$. Odtud dostaneme $-105 = (a - 10)(a + 12) = a^2 + 2a - 120$ a $a^2 + 2a - 15 = 0$, tj. $a = 3$ nebo $a = -5$.

Celkem $h(A) = 2$ pro $b = 2$ a $a = 3$ nebo $a = -5$, jinak $h(A) = 3$. □

Cvičení

2.4.2. Určete hodnosti následujících matic v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & a+3 \\ 2 & a-2 & 6 & 2 \\ 4 & -2 & 9 & a+6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2b & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 2a & -2 & b \\ 2 & 3b & 3 & 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & b \end{pmatrix}.$$

2.5 Inverzní matice

Příklad 2.5.1. K matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

určete matici inverzní.

Řešení. Snadno zjistíme, že $\det A = -80 \neq 0$, tedy A je regulární matice a A^{-1} existuje. Matici A^{-1} můžeme určit dvojím způsobem:

a) Pomocí adjungované matice $\operatorname{Adj} A$, kterou vypočteme tak, že každý prvek a_{ij} matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem $\mathcal{A}_{ij}$ a takto získanou matici transponujeme, tj.

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix}^T,$$

kde

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad \mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -17,$$

$$\mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8, \quad \mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad \mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16,$$

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -14, \quad \mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -24.$$

Tedy

$$\operatorname{Adj} A = \begin{pmatrix} -2 & -17 & 8 \\ -4 & 6 & 16 \\ -14 & 1 & -24 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}.$$

Pro inverzní matici platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj} A = -\frac{1}{80} \begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}.$$

b) Pomocí jednotkové matice: Do jednoho schématu napíšeme matici A a matici jednotkovou. Obě matice pak upravujeme stejnými elementárními řádkovými transformacemi, dokud z matice A (vlevo) nedostaneme matici jednotkovou (resp. k-násobek jednotkové matice). Pak matice, kterou jsme takto dostali vpravo, je hledaná matice A^{-1} (resp. její k-násobek).

V našem případě můžeme postupovat takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & -7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 120 & 0 & 0 & 3 & 6 & 21 \\ 0 & -240 & 0 & -51 & 18 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{7}{40} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{80} & \frac{-3}{40} & \frac{-1}{80} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{10} \end{array}\right)$$

Použité úpravy:

1 – od dvojnásobku 2. řádku odečteme pětinásobek 1. řádku a od 3. řádku odečteme dvojnásobek 1. řádku,

2 – od trojnásobku 3. řádku odečteme 2. řádek,

3 – k šestinásobku 1. řádku přičteme 2. řádek,

4 – k desetinásobku 1. řádku přičteme sedminásobek 3. řádku a k desetinásobku 2. řádku přičteme 3. řádek,

5 – 1. řádek vydělíme číslem 120, 2. řádek číslem -240 a 3. řádek číslem 10.

Tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \frac{7}{40} \\ \frac{17}{80} & \frac{-3}{40} & \frac{-1}{80} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = -\frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}.$$

Zkoušku správnosti výpočtu lze provést určením součinu matic A a A^{-1}, který by měl být roven matici jednotkové. □

P o z n á m k a. Postupujeme-li podle bodu b), není nutné předem počítat $\det A$, protože kdyby inverzní matice A^{-1} neexistovala (tj. $\det A = 0$), pak by nebylo možné matici A upravit elementárními řádkovými transformacemi na jednotkovou matici.

Cvičení

2.5.1. K dané matici určete matici inverzní:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1+i & 1-2i \\ 1+2i & 1-i \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.5.2. Řešte následující maticové rovnice v $M_3(\mathbb{R})$, resp. v $M_2(\mathbb{C})$:

$$\text{a)} \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{b)} \quad X \cdot \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ i & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Příklad 2.5.2. Určete inverzní matici k následující matici stupně $n \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\stackrel{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{array}\right)$$

$$\stackrel{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} n-1 & 0 & \dots & 0 & 1-n & 1-n & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 1-n & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ \multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n & 0 & \dots & 1-n & n-1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{array}\right)$$

$$\stackrel{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c|}{\dotfill} & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 & 1 & \dots & 2-n & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{array}\right)$$

Použité úpravy:

1 – n-tý řádek postupně odečteme od ostatních řádků,

2 – k n-tému řádku přičteme součet ostatních řádků,

3 – kromě n-tého řádku všechny řádky vynásobíme číslem $1-n$,

4 – n-tý řádek postupně přičteme k ostatním řádkům.

Vidíme, že

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 1 & \dots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení

2.5.3. Určete inverzní matice k následujícím čtvercovým maticím stupně n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2.6 Výsledky

2.1.1: a) $\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ -13 & -12 \\ 34 & 40 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 10 & 2 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ pro n liché, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pro n sudé; g) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 324 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; i) neexistuje.

2.1.2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ a $A^T = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}$ pro $b \neq 0$

2.2.1: $\frac{n(n+1)}{2}$

2.2.2: $\operatorname{sgn} P = -1$, např. $P = (1,4) \circ (2,7) \circ (3,5) \circ (3,6) \circ (2,3)$ (viz postup z př. 2.2.1).

2.2.3: $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.2.4: (a), (b) ne, (c) ano.

2.3.1 a) 17, b) 4, c) -560, d) 1, e) 10, f) x^2y^2, g) $16a + 33b + 28c - 45d$, h) $(x^3 - 3x + 1)(x^2 - x + 1)$, i) 90, j) -105, k) -18, l) 30.

2.3.2: a) $(-1)^{n-1}n!$, b) $n!$, c) $(-1)^{n-1}$, d) $2n + 1$, e) $a^n + (-1)^{n+1}b^n$, f) $(-1)^{n-1}(n-1)$, g) 0, h) $(a-b)^{n-1}(a + (n-1)b)$.

2.3.3: a) $n + 1$, b) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n+1)^{n-1}$, c) $(2n+1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

2.3.4: $(a^2 - b^2)^n$.

2.4.1: $h(A) = 2$, $h(B) = 3$, $h(C) = 2$, $h(D) = 1$, $h(E) = 2$, $h(F) = 4$.

2.4.2: $h(A) = 2$ pro $a = 4$, jinak $h(A) = 3$; $h(B) = 3$ pro každé $a, b \in \mathbb{R}$; $h(C) = 2$ pro $a = 0$, $b = 3$, $h(C) = 3$ pro $a = 0$, $b \neq 3$ nebo $a \neq 0$, $b = 3$, $h(C) = 4$ pro $a \neq 0$, $b \neq 3$.

2.5.1:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+i & 1-2i \\ 1+2i & -1-i \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$I^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

C^{-1} a K^{-1} neexistují.

2.5.2:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 1 & i-1 \end{pmatrix}.$$

2.5.3:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

3

Soustavy lineárních rovnic

3.1 Nehomogenní soustavy

Příklad 3.1.1. Rozhodněte, jsou-li následující soustavy lineárních rovnic řešitelné. V kladném případě určete množinu řešení:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & 11x_3 & - & 15x_4 & = & 1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 7x_3 & = & 12 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & & & = & -2 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & -3 \end{array}$$

Řešení. (a) Podle Frobeniovy věty je soustava řešitelná právě tehdy, když je hodnost matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{pmatrix}$$

rovna hodnosti rozšířené matice soustavy

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right).$$

Rozšířenou matici upravíme na trojúhelníkový tvar (G a u s s o v a e l i m i n a č n í m e t o d a):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B$$

Zřejmě $h(A) = h(\bar{A}) = 2$, takže soustava je řešitelná. Protože počet neznámých $n = 4$ je větší než hodnost matice $h(A) = 2$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h(A) = 2$ parametrech.

Matice B je rozšířenou maticí soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ & & & & 8x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array}$$

která je ekvivalentní s původní soustavou (tj. množiny řešení obou soustav jsou stejné). Zvolíme-li za parametry x_2 a x_4, dostaneme z druhé rovnice $x_3 = -\frac{11}{8}x_4$. Dosazením do první rovnice za x_3 určíme $x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{16}x_4 + \frac{1}{2}$. Množinu řešení původní soustavy lze tedy zapsat např. ve tvaru

$$P = \left\{\left(\tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{16}x_4 + \tfrac{1}{2}, x_2, -\tfrac{11}{8}x_4, x_4\right) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\right\},$$

případně ve tvaru

$$P = \left\{\left(3x_2 - x_4 + \tfrac{1}{2}, 2x_2, -22x_4, 16x_4\right) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Abychom se vyhnuli zpětnému dosazování za x_3 v 1. rovnici a dopočítávání x_1, můžeme matici B ještě upravit (snažíme se, aby obsahovala co nejvíce nul):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 16 & -24 & 40 & 56 & 8 \\ 0 & 0 & 40 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 16 & -24 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Odpovídající soustava pak má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} 16x_1 & - & 24x_2 & & & + & x_4 & = & 8 \\ & & & & 8x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array}$$

odkud ihned dostaneme $x_3 = -\frac{11}{8}x_4$ a $x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{16}x_4 + \frac{1}{2}$.

(b)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jelikož $h(A) = h(\bar{A}) = 3$ a počet neznámých je také 3, soustava má právě jedno řešení. Vidíme, že $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ a $x_3 = 1$. Množina řešení soustavy je $P = \{(3, 2, 1)\}$.

(c)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & 9 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 8 & -18 \\ 0 & 9 & -3 & 8 & -26 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, neboť $h(A) = 2 \neq 3 = h(\bar{A})$, tj. $P = \emptyset$. □

Cvičení

3.1.1. Řešte následující soustavy pomocí Gaussovy eliminační metody:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 10 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 5x_5 & = & 15 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & -10 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -5 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 7 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -8 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Příklad 3.1.2. Řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

Řešení. Jedná se o soustavu tří rovnic o třech neznámých, takže matice soustavy je čtvercová a navíc

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

V tomto speciálním případě má soustava právě jedno řešení, které lze určit i jinými způsoby než výše popsanou Gaussovou eliminační metodou. Uvedeme následující dva postupy:

(i) C r a m e r o v o p r a v i d l o: Je-li matice soustavy regulární (tj. $\det A \neq 0$), potom pro každé $j = 1, \dots, n$ platí

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},$$

kde matice A_j vznikne z A nahrazením j-tého sloupce pravými stranami soustavy.

V našem případě tedy

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12,$$

a proto $x_1 = -\frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{5}{7}$ a $x_3 = \frac{12}{7}$.

(ii) Pomocí inverzní matice A^{-1} k matici soustavy A: Danou soustavu lze přepsat na maticovou rovnici tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení této rovnice určíme tak, že vynásobíme zleva obě strany rovnice maticí A^{-1} inverzní k matici soustavy A. Způsobem popsaným v kapitole 2.4 zjistíme, že

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Po vynásobení inverzní maticí dostaneme rovnici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

tedy po vynásobení matic

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že $x_1 = -\frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{5}{7}$ a $x_3 = \frac{12}{7}$. □

Cvičení

3.1.2. Řešte následující soustavy Cramerovým pravidlem, pomocí inverzní matice i Gaussovou eliminační metodou:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & -2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & 3x_5 & = & -3 \end{array}$$

3.1.3. Pomocí Cramerova pravidla určete neznámou x_2 ze soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array}$$

3.1.4. Pokud je to možné, řešte následující soustavy pomocí Cramerova pravidla. V opačném případě je řešte Gaussovou eliminační metodou:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & -1 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 9x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 14x_2 & - & 21x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 15x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & -2 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 3 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

(g)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0
\end{array}$$

3.2 Homogenní soustavy

Příklad 3.2.1. Určete obecné řešení a fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
6x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\
9x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 9x_5 & = & 0 \\
6x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

Řešení. Soustava s nulovými pravými stranami (homogenní soustava) je vždy řešitelná, neboť má vždy tzv. triviální řešení (všechny neznámé rovny nule). Při řešení homogenní soustavy tedy pouze rozhodujeme, zda má právě jedno (triviální) řešení, nebo zda má nekonečně mnoho řešení (která vyjadřujeme pomocí parametrů). Přitom postupujeme obdobně jako v paragrafu 3.1, stačí však pracovat pouze s maticí soustavy, neboť nulové pravé strany se elementárními řádkovými transformacemi nemění. Úpravou matice soustavy určíme obecné řešení soustavy:

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice A je $h(A) = 2$ a počet neznámých $n = 5$. Proto obecné řešení soustavy bude obsahovat $n - h(A) = 3$ parametry. Zvolíme-li za parametry neznámé x_1, x_3, x_5, dostaneme

$$x_4 = -2x_3 + 3x_5, \quad x_2 = 3x_1 - 4x_3 + 11x_5.$$

Obecné řešení soustavy lze tedy zapsat ve tvaru

$$(x_1, 3x_1 - 4x_3 + 11x_5, x_3, -2x_3 + 3x_5, x_5)$$

Fundamentálním systémem řešení homogenní soustavy lineárních rovnic rozumíme libovolnou bázi prostoru řešení této soustavy. Tuto bázi lze určit např. následující postupnou volbou parametrů:

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 1, x_3 = 0, x_5 = 0 & \longrightarrow & \mathbf{u}_1 = (1, 3, 0, 0, 0) \\ x_1 = 0, x_3 = 1, x_5 = 0 & \longrightarrow & \mathbf{u}_2 = (0, -4, 1, -2, 0) \\ x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 1 & \longrightarrow & \mathbf{u}_3 = (0, 11, 0, 3, 1) \end{array}$$

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy. Množina řešení soustavy je rovna množině všech lineárních kombinací těchto tří vektorů. □

Cvičení

3.2.1. Určete obecné řešení a fundamentální systém soustavy:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 8x_2 & + & 17x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & - & 4x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & - & 6x_3 & - & 6x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 9x_1 & - & 14x_2 & + & 28x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}$$

Příklad 3.2.2. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u}_1 = (4, 2, 9, -20, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -11, 2, 13, 4)$ a $\mathbf{u}_3 = (9, -15, 8, 5, 2)$ tvoří fundamentální systém řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 4x_4 & + & 7x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & 11x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 5x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \end{array} \tag{S}$$

Řešení. V první řadě je nutné přesvědčit se, že každý z vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ je řešením soustavy (S) a že $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ jsou lineárně nezávislé. V opačném případě by nemohly tvořit fundamentální systém řešení (= bázi podprostoru řešení). Tento krok přenecháme čtenáři.

Dalším krokem je určení dimenze prostoru řešení soustavy (S):

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -14 & -22 & -14 & 18 \\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27 \\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & 11 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & -10 & -7 & 26 \\ 0 & 7 & 11 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jako parametry zvolíme x_3, x_4, x_5, obecné řešení lze pak psát ve tvaru

$$(10x_3 + x_4 - 26x_5, -11x_3 - x_4 + 9x_5, 7x_3, x_4, 7x_5)$$

a fundamentálním systémem řešení jsou vektory $\mathbf{v}_1 = (10, -11, 7, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 1, 0)$ a $\mathbf{v}_3 = (-26, 9, 0, 0, 7)$.

Dimenze prostoru řešení je tedy 3. Jelikož $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou linárně nezávislá řešení soustavy (S), je zřejmé, že tvoří fundamentální systém řešení.

□

3.3 Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Příklad 3.3.1. Řešte následující soustavu v závislosti na reálném parametru p:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & px_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & -3 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

Řešení. Matice soustavy A je čtvercová, takže můžeme určit její determinant a zjistit, pro které hodnoty parametru je matice soustavy regulární:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & p & 3 \\ -2 & 1 & p \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = p^2 - 19p + 34 = (p-2)(p-17).$$

Vidíme, že $\det A \neq 0$ právě tehdy, když $2 \neq p \neq 17$. Musíme tedy vyšetřit zvlášť následují tři případy:

1) Pro $2 \neq p \neq 17$ je $\det A \neq 0$ a řešení soustavy můžeme určit např. pomocí Cramerova pravidla:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & p & 3 \\ -3 & 1 & p \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 26(2-p), \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & p \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2-p,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} -1 & p & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3(2-p).$$

Odtud $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{26}{17-p}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{1}{17-p}$ a $x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{3}{17-p}$. Pro $2 \neq p \neq 17$ má tedy soustava řešení tvaru $(\frac{26}{17-p}, \frac{1}{17-p}, \frac{3}{17-p})$.

2) Pro $p = 2$ má soustava tvar

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že matice této soustavy již není regulární, nemůžeme použít Cramerovo pravidlo. Soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava je řešitelná, neboť $h(A) = h(\bar{A}) = 2$, a protože počet neznámých $n = 3$, bude obecné řešení soustavy obsahovat $n - h(A) = 1$ parametr. Zvolíme-li za parametr neznámou x_3, dostaneme obecné řešení soustavy ve tvaru $(\frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}, x_3)$.

3) Pro $p = 17$ má soustava tvar

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 17x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 17x_3 & = & -3 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \end{array}$$

Ani v tomto případě není matice soustavy regulární, nemůžeme tedy použít Cramerovo pravidlo. Soustavu budeme opět řešit úpravou matice soustavy na trojúhelníkový tvar (Gaussovou eliminační metodou):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 17 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 17 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 12 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & 3 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 12 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

V tomto případě vidíme, že $h(A) = 2 \neq 3 = h(\bar{A})$, takže soustava nemá řešení. □

Příklad 3.3.1 lze samozřejmě řešit i Gaussovou eliminační metodou. Výhodou tohoto postupu je možnost užití v případě, kdy matice soustavy není čtvercová:

Alternativní řešení příkladu 3.3.1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & p & 3 & -1 \\ -2 & 1 & p & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & p-5 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & p-14 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & p^2-19p+34 & -3p+6 \\ 0 & -9 & p-14 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & (p-2)(p-17) & -3(p+2) \\ 0 & -9 & p-14 & -3 \\ 9 & 0 & -5p+7 & 15 \end{array}\right)$$

Použili jsme tyto elementární řádkové transformace:

1 – 3. ř. přičteme k 1. ř., dvojnásobek 3. ř. přičteme ke 2. ř.

2 – k devítinásobku 1. ř. přičteme $(p-5)$-násobek 2. ř. [1]

3 – pětinásobek 2. ř. odečteme od devítinásobku 3. ř.

Původní soustava je tedy ekvivalentní se soustavou

$$\begin{array}{rcrcl} & & (p-2)(p-17)x_3 & = & -3(p-2) \\ -9x_2 & + & (p-14)x_3 & = & -3 \\ 9x_1 \qquad & + & (-5p+7)x_3 & = & 15 \end{array}$$

[1] Je dobré si na tomto místě uvědomit, že k devítinásobku 1. řádku přičítáme $(p-5)$-násobek 2. řádku, tj. 1. řádek vynásobíme 9 a pak přičteme $(p-5)$-násobek 2. řádku, přičemž 2. řádek zůstává beze změny. To je elementární řádková transformace bez ohledu na to, zda $p-5$ je nebo není nula. Kdybychom však 2. řádek vynásobili číslem $p-5$ a následně k němu přičítali devítinásobek 1. řádku (a 1. řádek by se neměnil), šlo by o elementární řádkovou transformaci jedině tehdy, když $p \neq 5$. Bylo by proto nutné předpokládat $p \neq 5$ a případ $p = 5$ vyřešit samostatně!

Pro $2 \neq p \neq 17$ dostáváme jediné řešení $x_3 = \frac{3}{17-p}$, $x_2 = \frac{1}{17-p}$ a $x_1 = \frac{26}{17-p}$. Pro $p = 2$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $x_1 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}$. Konečně pro $p = 17$ soustava řešení nemá. $\square$

Cvičení

3.3.1. Řešte následující soustavy v závislosti na parametru p:

(a)

$$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & px_2 & = & p \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & = & p \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & p \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{rcrcrcl} px_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & 1 \end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{rcrcrcl} px_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & px_2 & + & x_3 & = & p \\ x_1 & + & x_2 & + & px_3 & = & p^2 \end{array}$$

3.4 Výsledky

3.1.1: (a) $(1,-1,1,-1)$, (b) $(1+p,2+p,3+p,4+p,p)$, (c) $(3+5p-7q,-1-3p+4q,p,q)$, (d) $(1-p,p,2p,-3)$, (e) $(5p-7q+6,2p,-3p+3q-2,2q)$, (f) $(-2,1,4,3)$

3.1.2: (a) $(1,0,2)$, (b) $(1,1,1,2)$, (c) $(2,0,-2,-2,1)$.

3.1.3: $x_2 = 2$.

3.1.4: (a) Cramerovo pravidlo: $(1,2,-2)$, (b) Cramerovo pravidlo: $(2,-\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$, (c) Gaussova eliminační metoda: $(1-2p,p,0)$, (d) Cramerovo pravidlo: $(1,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1)$, (e) Gaussova eliminační metoda: $(p,-1+p,0,-1+p,-2p)$, (f) Gaussova eliminační metoda: nemá řešení, (g) Cramerovo pravidlo: $(0,0,0,0)$.

3.2.1: (a) obecné řešení: $(2x_2-2x_3,x_2,5x_3,-7x_3)$, fundamentální systém: $\mathbf{u}_1 = (2,1,0,0), \mathbf{u}_2 = (-2,0,5,-7)$; (b) pouze triviální řešení; (c) obecné řešení: $(0,0,0,x_5,x_5)$, fundamentální systém: $\mathbf{u} = (0,0,0,1,1)$; (d) pouze triviální řešení; (e) obecné řešení $(8p-7q,-6p+5q,p,q)$, fundamentální systém řešení $\{(8,-6,1,0),(-7,5,0,1)\}$; (f) obecné řešení $(-7p+7q,p,q,11p-13q)$, fundamentální systém řešení $\{(-7,1,0,11),(7,0,1,-13)\}$.

3.3.1: (a) pro $1 \neq p \neq -1$: jedno řešení $(0,1)$, pro $p=1$: nekonečně mnoho řešení tvaru $(t,1-t)$, pro $p=-1$: nekonečně mnoho řešení tvaru $(-1+t,t)$; (b) pro $1 \neq p \neq -1$: řešení tvaru $\left(\frac{-p^2}{1-p^2},\frac{p}{1-p^2}\right)$, pro $p=1$ a pro $p=-1$: nemá řešení; (c) pro $1 \neq p \neq -1$: řešení tvaru $\left(\frac{p}{1+p},\frac{p}{1+p}\right)$, pro $p=1$: nekonečně mnoho řešení tvaru $(t,1-t)$, pro $p=-1$: nemá řešení; (d) pro $p=1$: nekonečně mnoho řešení tvaru $(1-t-s,t,s)$, pro $p \neq 1$: jedno řešení $(-1,1,1)$; (e) pro $p=-2$: nemá řešení, pro $p=1$: nekonečně mnoho řešení tvaru $(1-t-s,t,s)$, pro $1 \neq p \neq -2$: jedno řešení $\left(\frac{1}{p+2},\frac{1}{p+2},\frac{1}{p+2}\right)$; (f) Pro $1 \neq p \neq -2$: jediné řešení $\left(-\frac{p+1}{p+2},\frac{1}{p+2},\frac{(p+1)^2}{p+2}\right)$; pro $p=1$ řešení ve tvaru $(1-t-s,t,s)$; pro $p=-2$ nemá řešení.

4

Vektorové prostory

4.1 Vektorové prostory a podprostory

Příklad 4.1.1. Rozhodněte, zda následující čtveřice jsou vektorové prostory:

(a) $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$;

(b) $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$;

(c) $(\mathbb{Z}, +, \mathbb{Z}, \cdot)$;

(d) $(\mathbb{Z}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$ (ve všech čtyřech případech $+$ a $\cdot$ jsou obvyklé sčítání a násobení komplexních čísel);

(e) $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \bullet)$, kde sčítání $+$ je definováno „po složkách“, tj. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, a levá vnější operace $\bullet$ je dána předpisem $a \bullet (x_1, x_2) = (ax_1, 0)$.

Řešení. Připomeňme, že vektorový prostor nad číselným tělesem T je systém $(V, +, T, \cdot)$, kde $(V, +)$ je komutativní grupa, $\cdot$ je levá vnější operace (tj. zobrazení $T \times V$ do V) a platí následující axiomy:

(i) $\forall a \in T\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V;\ a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$;

(ii) $\forall a, b \in T\ \forall \mathbf{u} \in V;\ (a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$;

(iii) $\forall a, b \in T\ \forall \mathbf{u} \in V;\ (ab) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$;

(iv) $\forall \mathbf{u} \in V;\ 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Je tedy zřejmé, že $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ a $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$ jsou vektorové prostory.

$(\mathbb{Z}, +, \mathbb{Z}, \cdot)$ není vektorový prostor, neboť $\mathbb{Z}$ není těleso. Ani $(\mathbb{Z}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$ není vektorový prostor (i když $\mathbb{Q}$ je těleso), protože $\cdot$ není levá vnější operace (pro $q \in \mathbb{Q}$ a $x \in \mathbb{Z}$ obecně $q \cdot x \notin \mathbb{Z}$).

V případě $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \bullet)$ není splněna podmínka (iv), neboť $1 \bullet (x_1, x_2) = (x_1, 0)$ pro každou dvojici $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tedy $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \bullet)$ není vektorový prostor. Všimněte si, že $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \bullet)$ má všechny ostatní vlastnosti vektorového prostoru, tj. $(\mathbb{R}^2, +)$ je komutativní grupa a platí (i), (ii) a (iii). $\square$

Příklad 4.1.2. Nechť $(V, +, T, \cdot)$ je vektorový prostor nad číselným tělesem T. Nechť X je neprázdná množina. Symbolem V^X označme množinu všech zobrazení $f\colon X \to V$. Pro $f, g \in V^X$ a $c \in T$ definujme součet zobrazení $f + g$ a c-násobek $c \cdot f$ takto:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in X)$$
$$(c \cdot f)(x) = cf(x) \qquad (x \in X)$$

Dokažte, že $(V^X, +, T, \cdot)$ je vektorový prostor.

Řešení. Pro každé $f, g \in V^X$ zřejmě $f + g \in V^X$. Protože $(V, +)$ je komutativní grupa, výše definované sčítání zobrazení je komutativní a asociativní (proveďte podrobný důkaz!) a nulovým prvkem je zobrazení $o\colon x \mapsto \mathbf{o}$ $(x \in X)$. Tedy $(V^X, +)$ je komutativní grupa. Zbývá ověřit axiomy (i) – (iv). Ukážeme si zde jen (i), ostatní tři se ověří analogicky (ověřte!):

Nechť $f, g \in V^X$, $a \in T$. Pro každé $x \in X$ platí $(a \cdot (f+g))(x) = a(f+g)(x) = a(f(x)+g(x)) = af(x) + ag(x) = (a \cdot f)(x) + (a \cdot g)(x)$, tj. $a \cdot (f+g) = a \cdot f + a \cdot g$. □

Cvičení

4.1.1. Buď $(T, +, \cdot)$ číselné těleso, $n \in \mathbb{N}$. Ověřte, že $(T^n, +, T, \cdot)$, kde

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n),$$

je vektorový prostor, tzv. *aritmetický prostor nad* T.

4.1.2. Nechť $M_{m \times n}(T)$ je množina všech matic typu $m \times n$ nad číselným tělesem T. Ukažte, že $(M_{m\times n}(T), +, T, \cdot)$ je vektorový prostor (+ je obvyklé sčítání matic, $\cdot$ skalární násobení matic zleva, tj. $\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| = \|a_{ij} + b_{ij}\|$ a $c \cdot \|a_{ij}\| = \|ca_{ij}\|$).

4.1.3. Nechť $C(a, b)$ je množina všech reálných funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a \le x \le b\}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme součet funkcí a reálný násobek obvyklým způsobem:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \& \quad (c \cdot f)(x) = cf(x)$$

pro $f, g \in C(a, b)$, $c \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $(C(a, b), +, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový prostor.

Příklad 4.1.3. Zjistěte, zda množina M tvoří podprostor (přesněji pole podprostoru) v aritmetickém prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \mathbb{R}, \cdot)$:

(a) $M = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2, 0, 0)\colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

(b) $M = \{(0, x_2, x_3, 2x_3, x_3 + 1)\colon x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Podprostorem v $\mathbb{R}^5$ je neprázdná podmnožina M taková, že

(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in M;\ \mathbf{u} + \mathbf{v} \in M$;

(ii) $\forall \mathbf{u} \in M\ \forall a \in \mathbb{R};\ a \cdot \mathbf{u} \in M$.

(a) Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$, tj. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_1 + u_2, 0, 0)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_1 + v_2, 0, 0)$ pro někt. $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Potom $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_1+u_2, 0, 0)+(v_1, v_2, v_1+v_2, 0, 0) = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_1 + u_2 + v_1 + v_2, 0, 0) \in M$. Tedy množina M je uzavřena na sčítání. Dál, pro každé $a \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{u} \in M$ platí $a \cdot \mathbf{u} = a \cdot (u_1, u_2, u_1 + u_2, 0, 0) = (au_1, au_2, au_1 + au_2, 0, 0) \in M$. Tedy celkem M je podprostorem v $\mathbb{R}^5$.

(b) Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$, tj. $\mathbf{u} = (0, u_2, u_3, 2u_3, u_3 + 1)$ a $\mathbf{v} = (0, v_2, v_3, 2v_3, v_3 + 1)$. Pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, u_2 + v_2, u_3 + v_3, 2u_3 + 2v_3, u_3 + v_3 + 2) \notin M$, a proto M není podprostor $\mathbb{R}^5$. □

Cvičení

4.1.4. Tvoří následující množiny podprostory v aritmetickém prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$?

(a) $M = \mathbb{Z}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}$;

(b) $M = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1 + \dots + x_n = 0\}$;

(c) $M = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1 + \dots + x_n \neq 0\}$;

(d) $M = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1 + \dots + x_n = a, 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$.

4.1.5. Nechť T je číselné těleso a T^T množina všech zobrazení $f \colon T \to T$. Definujme součet a c-násobek zobrazení „po bodech“ (jako v příkladě 4.1.2). Ověřte, že $(T^T, +, T, \cdot)$ je vektorový prostor.

Nechť $T[x]$ je množina všech *polynomických funkcí* $f \colon T \to T$, tj. takových zobrazení $f \colon T \to T$, pro než existují $a_0, \dots, a_n \in T$ tak, že $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ pro každé $x \in T$. Konečně nechť $T_n[x]$ je množina všech polynomických funkcí stupně nejvýše n. Dokažte, že $T[x]$ a $T_n[x]$ jsou podprostory prostoru T^T.

4.2 Lineární závislost vektorů

Příklad 4.2.1. V aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\mathbf{u}_3 = (5, 6, a)$ a $\mathbf{v} = (1, 3, 5)$. Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $\mathbf{v}$ byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

Řešení. Hledáme $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tak, aby $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$, tj. $c_1(3, 2, 5) + c_2(2, 4, 7) + c_3(5, 6, a) = (3c_1 + 2c_2 + 5c_3, 2c_1 + 4c_2 + 6c_3, 5c_1 + 7c_2 + ac_3) = (1, 3, 5)$. Dostáváme tedy soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3c_1 & + & 2c_2 & + & 5c_3 & = & 1 \\ 2c_1 & + & 4c_2 & + & 6c_3 & = & 3 \\ 5c_1 & + & 7c_2 & + & ac_3 & = & 5 \end{array} \tag{S}$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & a & 5 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & a-11 & 1 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & a-11 & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 8a-96 & 1 \end{array}\right)$$

Postupně jsme použili tyto úpravy:

1 – od 1. ř. odečteme 2. ř. a od 3. ř. odečteme součet 1. a 2. ř.

2 – od 2. ř. odečteme dvojnásobek 1. ř.

3 – od osminásobku 3. ř. odečteme 2.ř.

Je vidět, že soustava (S) má řešení, právě když $8a - 96 \neq 0$, tj. když $a \neq 12$. Tedy $\mathbf{v}$ je lineární kombinací $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ pro každé $a \neq 12$. □

Příklad 4.2.2. Najděte nutnou a postačující podmínku pro lineární nezávislost čísel 1 a $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jako vektorů ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$.

Řešení. Nechť $c_1, c_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ a $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot u = 0$. Pak $u = -\frac{c_1}{c_2} \in \mathbb{Q}$, tedy pokud 0 je netriviální lineární kombinací 1 a u, potom $u \in \mathbb{Q}$. Naopak, je-li $u \in \mathbb{Q}$, stačí vzít libovolné $c_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ a $c_1 = -c_2 u \in \mathbb{Q}$; potom $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot u = 0$. Celkem tedy 1 a u jsou lineárně nezávislé vektory v $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$, právě když $u \notin \mathbb{Q}$. □

P o z n á m k a. Je zřejmé, že aritmetický prostor $(\mathbb{R}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ má dimenzi 1. Vektorový prostor $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$ ale není konečné dimenze. Opravdu, kdyby $(\mathbb{R}, +, \mathbb{Q}, \cdot)$ byl dimenze $n \in \mathbb{N}$, pak by byl izomorfní s aritmetickým prostorem $(\mathbb{Q}^n, +, \mathbb{Q}, \cdot)$, což ovšem není možné, neboť neexistuje bijekce množiny $\mathbb{Q}^n$ na množinu $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}^n$ má stejnou mohutnost jako $\mathbb{Q}$).

Cvičení

4.2.1. V aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 1, 4)$ a $\mathbf{u}_3 = (a, 4, 11)$. Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ byly lineárně závislé.

4.2.2. Nechť $(V, +, T, \cdot)$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T. Najděte některou posloupnost lineárně závislých vektorů z V. Existuje posloupnost lineárně nezávislých vektorů ve V?

4.2.3. Rozhodněte, zda množina $\{(1, 0, 2), (-2, 1, 1), (4, -1, 3)\}$ je báze aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$.

4.3 Podprostor generovaný množinou, báze

Příklad 4.3.1. Nechť $W = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}]$ je podprostor $\mathbb{R}^4$ generovaný vektory $\mathbf{u}_1 = (3, 2, 1, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 4, 2, 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0, 1)$. Najděte bázi prostoru W, která obsahuje $\mathbf{v} = (1, 6, 3, 7)$.

Řešení. Nejprve zjistíme, zda taková báze existuje, tj. zda $\mathbf{v}$ patří do W. To lze udělat dvěma způsoby:

1) $\mathbf{v} \in W$, právě když $\mathbf{v}$ je lineární kombinací $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, tj. $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$ pro někt. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Dostaneme soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3c_1 & - & 3c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ 2c_1 & + & 4c_2 & & & = & 6 \\ c_1 & + & 2c_2 & & & = & 3 \\ 5c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 7 \end{array}$$

která je řešitelná, jak se snadno přesvědčíme Gaussovou eliminační metodou. Tedy $\mathbf{v} \in W$.

2) Určíme dimenze prostorů W a $W' = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}]$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\dim W = 2$ (= hodnost matice tvořené prvními třemi řádky) a také $\dim W' = 2$ (= hodnost celé matice). Protože W je podprostorem W' a oba prostory mají stejnou dimenzi, nutně $W = W'$, což znamená, že $\mathbf{v} \in W$.

Druhý způsob je výhodnější, protože známe dimenzi prostoru W a můžeme tak okamžitě najít bázi prostoru W – stačí vzít vektory odpovídající nenulovým řádkům redukované matice. V našem případě $\mathbf{v}$ a jeden z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ (báze má 2 prvky, protože $\dim W = 2$). □

Cvičení

4.3.1. Zjistěte, zda vektory $\mathbf{v} = (1, -3, 0, -5)$ a $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)$ patří do podprostoru $W = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}]$ (v $\mathbb{R}^4$) generovaného vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (2, -1, 0, 0)$ a $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 0, -1)$.

4.3.2. Určete dimenzi a najděte některou bázi podprostoru W aritmetického prostoru $\mathbb{R}^4$, který je generován vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 1, -1, -1)$ a $\mathbf{u}_4 = (1, 0, 1, 1)$.

4.3.3. Najděte bázi B aritmetického prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektory $(1, 1, 0, 0)$ a $(0, 0, 1, 1)$.

4.3.4. Pro které $a \in \mathbb{R}$ tvoří vektory $\mathbf{u}_1 = (0, 1, a)$, $\mathbf{u}_2 = (a, 0, 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (a, 1, a+1)$ bázi aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$?

4.3.5. Najděte některou bázi prostoru $T_n[x]$ polynomů nad T stupně nejvýše n z cv. 4.1.5.

Příklad 4.3.2. V aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^4$ máme dány vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 1)$ a $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 3, 7)$. Určete dimenze podprostorů $U = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}]$, $V = [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$, $U \cap V$ a $U + V$.

Řešení. Ihned vidíme, že $\dim U = \dim V = 2$. Dále víme, že pro dimenze prostorů U, V, $U \cap V$ a $U + V$ platí vztah

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V).$$

Stačí tedy znát $\dim(U + V)$ nebo $\dim(U \cap V)$.

a) Jednodušší je určit $\dim(U + V)$, neboť $U + V = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $\dim(U + V) = 3$, odkud již plyne $\dim(U \cap V) = 1$.

b) Druhou možností je určit $\dim(U \cap V)$. K tomu je nutné popsat vektory, které patří do $U \cap V$. Zřejmě $\mathbf{w} \in U \cap V$, právě když $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{w} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2$ pro někt. $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, tj. $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 - d_1\mathbf{v}_1 - d_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{o}$. Dostáváme homogenní soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} c_1 & - & c_2 & - & 2d_1 & - & d_2 & = & 0 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & d_1 & + & d_2 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & & & - & 3d_2 & = & 0 \\ & & c_2 & - & d_1 & - & 7d_2 & = & 0 \end{array}$$

Použijeme Gaussovu eliminační metodu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 – dvojnásobek 1. ř. odečteme od 2. ř., 1. ř. odečteme od 3. ř.

2 – 3. ř. vydělíme dvěma, odečteme ho od 4. ř. a trojnásobek odečteme od 2. ř.

3 – 2. ř. přičteme ke 4. ř., 2. ř. vydělíme dvěma a vyměníme se 3. ř.

4 – k 1. ř. přičteme součet 2. a 3. ř., od 2. ř. odečteme 3. ř.

Zvolíme-li za parametr např. d_2, pak $c_1 = -d_2$, $c_2 = 4d_2$ a $d_1 = -3d_2$. Odtud vyplývá, že když $\mathbf{w} \in U \cap V$, potom $\mathbf{w} = -d_2\mathbf{u}_1 + 4d_2\mathbf{u}_2 = d_2(-\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2)$. Tedy podprostor $U \cap V$ je generován vektorem $-\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 = (-5, 2, 3, 4)$, a proto $\dim(U \cap V) = 1$. □

Příklad 4.3.3. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ a $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 1)$ generují stejný podprostor v $\mathbb{R}^4$ jako $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3, 3)$ a $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, -1)$.

Řešení. Ukážeme si dva možné postupy. Pro stručnost označme $U = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}]$ a $V = [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$.

1) Je jasné, že $U = V$, právě když $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U$. Snadným výpočtem zjistíme, že $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$, tj. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$. Podobně $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, tedy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U$. Proto $U = V$.

2) Určíme dimenzi prostoru $U + V = [\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tj. $\dim U + V = 2$. Jelikož $\dim U = \dim V = 2$ a U, V jsou podprostory $U + V$, plyne odtud $U = U + V = V$. □

Cvičení

4.3.6. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory $W_1 = [\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3)\}]$ a $W_2 = [\{(1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1)\}]$. Určete $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ a $\dim(W_1 + W_2)$. Zdůvodněte, proč platí $W_1 + W_2 = W_2$ a $W_1 \cap W_2 = W_1$.

4.3.7. V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory $W_1 = [\{(1, 2, 1, -2), (2, 3, 1, 0), (1, 2, 2, -3)\}]$ a $W_2 = [\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1), (1, 3, 0, -4)\}]$. Určete $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim(W_1 \cap W_2)$ a $\dim(W_1 + W_2)$. Najděte některou bázi $W_1 + W_2$.

4.3.8. Najděte některou bázi prostoru $W_1 \cap W_2$ z cvičení 4.3.7.

4.3.9. Nechť $W_1 = [\{(1, 4, 3, 2), (1, 3, 1, 1)\}]$ a $W_2 = [\{(1, a + 4, 5, 3), (-1, 2a - 4, 1, 0)\}]$. Jak závisí $\dim(W_1 \cap W_2)$ na $a \in \mathbb{R}$?

4.4 Výsledky

4.1.1: Podle cv. 1.2.24 je $(T^n, +)$ komutativní grupa, stačí tedy ověřit axiomy (i) – (iv).

4.1.3: Jestliže $f, g \in C(a, b)$, pak $f + g \in C(a, b)$. Sčítání reálných funkcí je asociativní a komutativní, neutrálním prvkem je konstantní funkce $o\colon x \mapsto 0$ (tj. $o(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$). Tedy $(C(a, b), +)$ je komutativní grupa. Vlastnosti (i) – (iv) se snadno ověří.

4.1.4: b) ano, a), c), d) ne.

4.2.1: Pro $a = 7$ platí $-\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{o}$.

4.2.2: Pro libovolný vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ je $\mathbf{u}, 2\mathbf{u}, 3\mathbf{u}, \ldots, n\mathbf{u}, \ldots$ posloupnost lineárně závislých vektorů. V prostoru *konečné* dimenze posloupnost lineárně nezávislých vektorů neexistuje, neboť každá lineárně nezávislá množina je konečná.

4.2.3: Není, $(1, 0, 2) = \frac{1}{2}(-2, 1, 1) + \frac{1}{2}(4, -1, 3)$.

4.3.1: $\mathbf{v} \in W$, $\mathbf{w} \notin W$.

4.3.2: $\dim W = 2$, např. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

4.3.3: Např. $B = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

4.3.4: Platí $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$, tj. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou lineárně závislé pro každé $a \in \mathbb{R}$ a proto nikdy netvoří bázi.

4.3.5: $\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$

4.3.6: $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, proto $W_1 + W_2 = W_2$ a $W_1 \cap W_2 = W_1$.

4.3.7: $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$, $\dim(W_1 + W_2) = 4$ a $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$; báze $W_1 + W_2$ je např. $\{(1, 2, 1, -2), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, -1), (1, 3, 0, -4)\}$ (můžeme vzít libovolné 4 lineárně nezávislé vektory z 6 zadaných).

4.3.8: Např. $\{(1, 1, 1, 1), (1, 3, 0, -4)\}$; platí $(1, 1, 1, 1) = -2(1, 2, 1, -2) + (2, 3, 1, 0) + (1, 2, 2, -3) \in W_1$ a $(1, 3, 0, -4) = 5(1, 2, 1, -2) - (2, 3, 1, 0) - 2(1, 2, 2, -3) \in W_1$.

4.3.9: Nejprve určete dimenzi $W_1 + W_2$: $\dim(W_1 + W_2) = 2$ pro $a = 1$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ pro $a \neq 1$. Protože $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, platí $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ pro $a = 1$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ pro $a \neq 1$.

5

Homomorfismy vektorových prostorů

5.1 Základní vlastnosti homomorfismů

Nejprve připomeňme pojem homomorfismu vektorových prostorů. Nechť $(V, +, T, \cdot)$ a $(W, +, T, \cdot)$ jsou vektorové prostory (nad stejným tělesem T). Zobrazení $\varphi\colon V \to W$ se nazývá *homomorfismus* V do W, když platí

(i) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V;\ \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$;

(ii) $\forall \mathbf{x} \in V\ \forall c \in T;\ \varphi(c \cdot \mathbf{x}) = c\varphi(\mathbf{x})$.

Homomorfismus φ se nazývá *izomorfismem*, pokud φ je navíc bijekce. *Endomorfismus* je homomorfismus V do V. *Jádrem* homomorfismu φ se rozumí množina

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{\mathbf{x} \in V : \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\};$$

úplným obrazem homomorfismu φ je množina

$$\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}.$$

$\operatorname{Ker} \varphi$ je podprostor ve V a $\operatorname{Im} \varphi$ je podprostor ve W. Platí také, že φ je injekce, právě když $\operatorname{Ker} \varphi = \{\mathbf{o}\}$, a φ je surjekce, právě když $\operatorname{Im} \varphi = W$.

Příklad 5.1.1. Rozhodněte, zda následující zobrazení jsou homomorfismy (příp. izomorfismy) příslušných vektorových prostorů. V případě, že zobrazení φ je homomorfismus, určete jádro $\operatorname{Ker} \varphi$ a úplný obraz $\operatorname{Im} \varphi$.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 3x_2, 4x_3 + 5)$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3, x_3)$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde $\varphi((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$;

(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$;

(e) $\varphi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, kde $\varphi((z_1, z_2, z_3)) = (0, 2z_1 + iz_3, z_2 + z_3)$;

(f) $\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$, kde $\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_2x^3 + 2a_1x^2 + a_0x$;

(g) $\varphi\colon M_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi(A) = (0, \det A)$.

Řešení. (a) Zjistíme, zda zobrazení φ splňuje výše uvedené podmínky (i) a (ii). Zvolme libovolné vektory $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Platí

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) &= \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3))\\ &= (2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2), 4(x_3 + y_3) + 5),\end{aligned}$$

ale

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, x_2, x_3)) + \varphi((y_1, y_2, y_3)) &= (2x_1 + 3x_2, 4x_3 + 5) + (2y_1 + 3y_2, 4y_3 + 5)\\ &= (2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2), 4(x_3 + y_3) + 10).\end{aligned}$$

Tedy $\varphi((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) \neq \varphi((x_1, x_2, x_3)) + \varphi((y_1, y_2, y_3))$ a φ proto není homomorfismus.

(b) Pro libovolné vektory $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ a pro libovolný skalár $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) &= \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3))\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_3 + y_3)\\ &= (x_1, x_2, x_3, x_3) + (y_1, y_2, y_3, y_3)\\ &= \varphi((x_1, x_2, x_3)) + \varphi((y_1, y_2, y_3)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c\varphi((x_1, x_2, x_3)) &= c(x_1, x_2, x_3, x_3)\\ &= (cx_1, cx_2, cx_3, cx_3)\\ &= \varphi((cx_1, cx_2, cx_3))\\ &= \varphi(c(x_1, x_2, x_3)).\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že φ je homomorfismus $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^4$.

Nyní určíme jádro a obraz homomorfismu φ. Jestliže pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ platí $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, tj. $(x_1, x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$, pak $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tedy $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, což znamená, že $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$. Jako důsledek také dostáváme, že φ je injektivní.

Dále $\operatorname{Im}\varphi = \{(x_1, x_2, x_3, x_3)\colon (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$, tedy $\operatorname{Im}\varphi$ je vlastní podmnožinou $\mathbb{R}^4$ a φ proto není surjektivní.

Celkem tedy φ je homomorfismus, který ale není izomorfismem.

(c) Nechť $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ a $c \in \mathbb{R}$. Platí:

$$\begin{aligned}\varphi((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \varphi((x_1, x_2)) + \varphi((y_1, y_2)),\end{aligned}$$

$$c\varphi((x_1, x_2)) = c(x_1 + x_2) = cx_1 + cx_2 = \varphi((cx_1, cx_2)) = \varphi(c(x_1, x_2)),$$

a proto φ je homomorfismus $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$.

Jestliže pro $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ platí $\varphi((x_1, x_2)) = \mathbf{o}$, pak $x_1 + x_2 = 0$, neboli $\operatorname{Ker} \varphi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = -x_2\}$. Zobrazení φ tedy není injektivní, takže není ani izomorfismem. Homomorfismus φ je však surjektivní, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $x = f((x, 0))$, tj. $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}$.

(d) Pro libovolné vektory $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ a pro libovolné číslo $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) \\
&= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)) \\
&= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2)) \\
&= (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) + (y_1 + y_2, y_1 + 2y_2) \\
&= \varphi((x_1, x_2)) + \varphi((y_1, y_2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\varphi((x_1, x_2)) &= c(x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) = (c(x_1 + x_2), c(x_1 + 2x_2)) \\
&= (cx_1 + cx_2, cx_1 + 2cx_2) = \varphi((cx_1, cx_2)) \\
&= \varphi(c(x_1, x_2)).
\end{aligned}$$

Tedy φ je homomorfismus $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$.

Nechť nyní $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ je takový vektor, že $\varphi((x_1, x_2)) = \mathbf{o}$, tj. platí $x_1 + x_2 = 0$ a $x_1 + 2x_2 = 0$. Potom $x_1 = x_2 = 0$, a tedy $(x_1, x_2) = \mathbf{o}$, což znamená, že $\operatorname{Ker} \varphi = \{\mathbf{o}\}$. Proto φ je injektivní.

Dál ukážeme, že φ je surjektivní, tj. pro každý vektor $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ existuje vektor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, který je jeho vzorem v homomorfismu φ. Pro takový vektor musí platit $\varphi((x_1, x_2)) = (y_1, y_2)$, tj. $y_1 = x_1 + x_2$ a $y_2 = x_1 + 2x_2$. Odtud $x_1 = 2y_1 - y_2$ a $x_2 = y_2 - y_1$. Snadno se přesvědčíme, že opravdu platí $(y_1, y_2) = \varphi((2y_1 - y_2, y_2 - y_1))$.

Homomorfismus φ je tedy surjektivní, tj. $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^2$, a celkově jsme zjistili, že φ je izomorfismus.

(e) Pro libovolné vektory $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$ a libovolné komplexní číslo $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned}
\varphi((z_1, z_2, z_3) + (w_1, w_2, w_3)) &= \varphi((z_1 + w_1, z_2 + w_2, z_3 + w_3)) \\
&= (0, 2(z_1 + w_1) + i(z_3 + w_3), (z_2 + w_2) + (z_3 + w_3)) \\
&= (0, 2z_1 + iz_3 + 2w_1 + iw_3, z_2 + z_3 + w_2 + w_3) \\
&= (0, 2z_1 + iz_3, z_2 + z_3) + (0, 2w_1 + iw_3, w_2 + w_3) \\
&= \varphi((z_1, z_2, z_3)) + \varphi((w_1, w_2, w_3)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c\varphi((z_1, z_2, z_3)) &= c(0, 2z_1 + iz_3, z_2 + z_3) = (0, 2cz_1 + icz_3, cz_2 + cz_3) \\
&= \varphi((cz_1, cz_2, cz_3)) = \varphi(c(z_1, z_2, z_3)).
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že φ je homomorfismus $\mathbb{C}^3$ do $\mathbb{C}^3$.

Nechť nyní $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ je takový vektor, že $\varphi((z_1, z_2, z_3)) = \mathbf{o}$. Pak $2z_1 + iz_3 = 0$ a $z_2 + z_3 = 0$, tedy jádro homomorfismu φ dostaneme jako množinu řešení homogenní soustavy dvou lineárních rovnic o třech neznámých z_1, z_2, z_3. Tato soustava má obecné řešení $(-\frac{1}{2}iz_3, -z_3, z_3)$, kde $z_3 \in \mathbb{C}$. Potom $\operatorname{Ker}\varphi = \{(-\frac{1}{2}iz_3, -z_3, z_3) \colon z_3 \in \mathbb{C}\}$, neboli φ není injektivní.

Dále zřejmě $\operatorname{Im}\varphi = \{(0, z_1, z_2) \colon z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$, tedy f není ani surjektivní.

(f) $\mathbb{R}_2[x]$ a $\mathbb{R}_3[x]$ jsou prostory reálných polynomů f stupně nejvýše 2, resp. 3 (viz cviční 4.1.5). Pro libovolné polynomy (vektory) $a_2x^2 + a_1x + a_0$ a $b_2x^2 + b_1x + b_0$ z $\mathbb{R}_2[x]$ a pro libovolné číslo $k \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}\varphi((a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0)) &= \\ &= \varphi(((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)) \\ &= 3(a_2 + b_2)x^3 + 2(a_1 + b_1)x^2 + (a_0 + b_0)x \\ &= (3a_2x^3 + 2a_1x^2 + a_0x) + (3b_2x^3 + 2b_1x^2 + b_0x) \\ &= \varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) + \varphi(b_2x^2 + b_1x + b_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) &= k(3a_2x^3 + 2a_1x^2 + a_0x) = (3ka_2x^3 + 2ka_1x^2 + ka_0x) \\ &= \varphi(ka_2x^2 + ka_1x + ka_0) = \varphi(k(a_2x^2 + a_1x + a_0)).\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že f je homomorfismus $\mathbb{R}_2[x]$ do $\mathbb{R}_3[x]$.

Na nulový polynom z $\mathbb{R}_3[x]$ se homomorfismem φ zřejmě zobrazí pouze nulový polynom z $\mathbb{R}_2[x]$, neboli $\operatorname{Ker}\varphi$ obsahuje právě nulový polynom z $\mathbb{R}_2[x]$, a tedy φ je injektivní. φ však není surjektivní, neboť $\operatorname{Im}\varphi = \{f(x) \in \mathbb{R}_3[x] \colon f(x) = a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x\} \neq \mathbb{R}_3[x]$.

(g) $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ je vektorový prostor všech čtvercových matic 2×2 nad tělesem $\mathbb{R}$ (viz cvičení 4.1.2). Pro libovolné dvě matice (vektory) $A, B \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ platí $\varphi(A + B) = (0, \det(A + B))$ a $\varphi(A) + \varphi(B) = (0, \det A) + (0, \det B) = (0, \det A + \det B)$. Protože obecně rovnost $\det(A + B) = \det A + \det B$ *neplatí*, zobrazení φ není homomorfismus.

$\square$

Příklad 5.1.2. Určete defekt a hodnost každého homomorfismu φ z příkladu 5.1.1; přesvědčte se, že součet defektu a hodnosti homomorfismu $\varphi \colon V \to W$ se rovná dimenzi prostoru V.

Řešení. Připomeňme, že *defekt* homomorfismu $\varphi \colon V \to W$ je dimenze $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq\subseteq V$ a *hodnost* φ je dimenze $\operatorname{Im}\varphi \subseteq\subseteq W$. S využitím řešení příkladu 5.1.1 dostaneme:

(b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$ a $\operatorname{Im}\varphi = \{(x_1, x_2, x_3, x_3) \colon (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\} = [\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}]$, tedy defekt je $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$ a hodnost $\dim\operatorname{Im}\varphi = 3$.

(c) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon -x_1 = x_2\} = \{(x_1, -x_1) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \in \mathbb{R}\} = [\{(-1, 1)\}]$ a $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$, tj. defekt $= \dim\operatorname{Ker}\varphi = 1$ a hodnost $= \dim\operatorname{Im}\varphi = 1$.

(d) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{o}\}$ a $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, tj. defekt $= \dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$ a defekt $= \dim\operatorname{Im}\varphi = 2$.

(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(-\frac{1}{2}iz_3, -z_3, z_3) \colon z_3 \in \mathbb{C}\} = [\{(-\frac{1}{2}i, -1, 1)\}]$ a $\operatorname{Im}\varphi = \{(0, z_1, z_2) \colon z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} = [\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}]$, tedy defekt $= \dim\operatorname{Ker}\varphi = 1$ a hodnost $= \dim\operatorname{Im}\varphi = 2$.

(f) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ (0 zde značí nulový polynom z $\mathbb{R}_2[x]$) a $\operatorname{Im}\varphi = \{f(x) \in \mathbb{R}_3[x]\colon f(x) = a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x\} = [\{x^3, x^2, x\}]$, tj. defekt $= \dim\operatorname{Ker}\varphi = 0$, hodnost $= \dim\operatorname{Im}\varphi = 3$. $\square$

Cvičení

5.1.1. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení homomorfismy (příp. izomorfismy) příslušných aritmetických vektorových prostorů:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, 2)$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + x_2, 2x_3, 0)$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, 3x_1 + x_2, x_3 + 1)$;

(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (1, 1)$;

(e) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (0, 0)$;

(f) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1^2, x_2)$;

(g) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2^3)$.

5.1.2. Ukažte, že následující zobrazení jsou homomorfismy příslušných vektorových prostorů. Určete jejich jádra a obrazy a rozhodněte, které z nich jsou injektivní, surjektivní, příp. izomorfismy.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_2, x_3, x_4)$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$;

(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_1, x_1, x_1)$;

(e) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi((x_1, x_2)) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$;

(f) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, kde $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$;

(g) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = x_1 + \dots + x_n$;

(h) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kde $\varphi((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

5.1.3. Dokažte, že zobrazení $\psi\colon a+bi \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ je injektivní homomorfismus $(\mathbb{C}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ do $(M_{2\times 2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$.

5.1.4. Dokažte, že vektorový prostor $T_n[x]$ polynomů stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem T (viz cv. 4.1.5) je izomorfní s aritmetickým vektorovým prostorem T^{n+1}.

5.1.5. Nechť V je vektorový prostor a $Aut(V)$ množina všech izomorfismů V na V (takové izomorfismy se nazývají *automorfismy* prostoru V). Dokažte, že vzhledem k operaci skládání zobrazení tvoří $Aut(V)$ grupu.

Příklad 5.1.3. Nechť φ je endomorfismus *konečně generovaného* vektorového prostoru $(V, +, T, \cdot)$. Dokažte, že je-li φ injekce, potom φ je izomorfismus.

Řešení. Tvrzení okamžitě vyplývá z toho, že $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$. Opravdu, když φ je injekce, pak $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 0$, a tedy $\operatorname{Im} \varphi = V$.

Ukážeme si také přímý důkaz: Nechť $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je báze prostoru V. Dokážeme, že $\{\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_n)\}$ je báze V. Když $c_1\varphi(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n\varphi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{o}$, pak $\varphi(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{o}$, odkud plyne $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou ovšem lineárně nezávislé, tedy nutně $c_1 = \cdots = c_n = 0$. To znamená, že i $\varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_n)$ jsou lineárně nezavislé, a proto tvoří bázi V (neboť $\dim V = n$). Každý vektor $\mathbf{w} \in V$ můžeme tedy psát ve tvaru $\mathbf{w} = c_1\varphi(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_n\varphi(\mathbf{v}_n) = \varphi(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n)$ pro někt. $c_1, \ldots, c_n \in T$, tj. φ je surjektivní. □

Příklad 5.1.4. Nechť $(V, +, T, \cdot)$ je vektorový prostor konečné dimenze. Označme $V^* = Hom(V, T)$ množinu všech homomorfismů $(V, +, T, \cdot)$ do aritmetického prostoru $(T, +, T, \cdot)$. Dokažte, že $(V^*, +, T, \cdot)$, kde pro $\varphi, \psi \in V^*$ a $c \in T$ definujeme $\varphi + \psi$ a $c \cdot \varphi$ „po bodech“, tj.

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}),\\ (c \cdot \varphi)(\mathbf{x}) &= c \cdot \varphi(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

je vektorový prostor a že platí $\dim V^* = \dim V$. Homomorfismy $\varphi \in Hom(V, T)$ se nazývají *lineární formy* prostoru V a vektorový prostor V^* se nazývá *duální prostor* prostoru V.

Řešení. Podle příkladu 4.1.2 tvoří množina všech zobrazení $V \to T$ vektorový prostor $(T^V, +, T, \cdot)$, jehož nulovým vektorem je konstantní zobrazení $o\colon \mathbf{x} \in V \mapsto 0 \in T$. Zřejmě $o \in V^*$. Snadno se ukáže, že $\varphi + \psi \in V^*$ a $c \cdot \varphi \in V^*$ pro každé $\varphi, \psi \in V^*$. Tedy $(V^*, +, T, \cdot)$ podprostor prostoru $(T^V, +, T, \cdot)$.

Ukážeme, že V a V^* mají stejnou dimenzi. Nechť $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ je báze V. Každý vektor $\mathbf{x} \in V$ lze *jednoznačně* psát ve tvaru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$, pro každé $i = 1, \ldots, n$ můžeme tedy definovat zobrazení $\pi_i\colon V \to T$ předpisem $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$. Tj. π_i vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje jeho i-tou souřadnici vzhledem k bázi B. Uvědomte si, že

$$\pi_i(\mathbf{v}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{$*$}$$

Snadno se ověří, že $\pi_i \in V^* = Hom(V, T)$. Nyní stačí ukázat, že lineární formy $\pi_1, \ldots, \pi_n$ jsou lineárně nezávislé v prostoru V^*.

Předpokládejme, že $c_1\pi_1 + \cdots + c_n\pi_n = o$, kde o značí nulový vektor z V^*, tj. konstantní funkci $o\colon \mathbf{x} \in V \mapsto 0 \in T$. Tedy pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ platí $0 = (c_1\pi_1 +$

$\cdots + c_n\pi_n)(\mathbf{x}) = c_1\pi_1(\mathbf{x}) + \cdots + c_n\pi_n(\mathbf{x}) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$. Dosadíme-li za $\mathbf{x}$ postupně $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dostaneme $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Tedy $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ je báze duálního prostoru V^*. Báze duálního prostoru V^*, která splňuje $(*)$, se nazývá *duální bází* k bázi B. $\square$

Cvičení

5.1.6. Nechť $(C(a, b), +, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $[a, b]$ (viz cvičení 4.1.3). Rozhodněte, zda následující zobrazení $\varphi_1, \varphi_2 \colon C(a, b) \to \mathbb{R}$ jsou lineární formy na $C(a, b)$:

$\varphi_1(f) = f(a) - f(b)$,

$\varphi_2(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

5.2 Transformace souřadnic

Stručně připomeňme, že souřadnicemi vektoru $\mathbf{x} \in V$ vzhledem k bázi $M = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorového prostoru $(V, +, T, \cdot)$ se rozumí n-tice $\{\mathbf{x}\}_M = (x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou jednoznačně určená čísla z T taková, že $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$. Matice přechodu od báze $M = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ k bázi $M' = \{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ je matice

$$A = \begin{pmatrix} \{\mathbf{v}'_1\}_M \\ \{\mathbf{v}'_2\}_M \\ \cdots\cdots \\ \{\mathbf{v}'_n\}_M \end{pmatrix}.$$

Tedy v i-tém řádku jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}'_i$ vzhledem k bázi M.

Příklad 5.2.1. Určete matici přechodu od báze $M = \{(1, 2, 1), (2, -1, 3), (-2, 3, 2)\}$ k bázi $M' = \{(-5, 9, 2), (6, -10, 5), (-1, 2, 9)\}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Určíme souřadnice vektorů $(-5, 9, 2), (6, -10, 5), (-1, 2, 9)$ vzhledem k bázi M. Označíme-li tyto souřadnice $\{(-5, 9, 2)\}_M = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\{(6, -10, 5)\}_M = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ a $\{(-1, 2, 9)\}_M = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$, pak musí platit

$$\begin{aligned} (-5, 9, 2) &= a_{11}(1, 2, 1) + a_{12}(2, -1, 3) + a_{13}(-2, 3, 2), \\ (6, -10, 5) &= a_{21}(1, 2, 1) + a_{22}(2, -1, 3) + a_{23}(-2, 3, 2), \\ (-1, 2, 9) &= a_{31}(1, 2, 1) + a_{32}(2, -1, 3) + a_{33}(-2, 3, 2). \end{aligned}$$

Z těchto tří vektorových rovnic dostáváme následující tři soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{11} & + & 2a_{12} & - & 2a_{13} & = & -5 \\ 2a_{11} & - & a_{12} & + & 3a_{13} & = & 9 \\ a_{11} & + & 3a_{12} & + & 2a_{13} & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{21} & + & 2a_{22} & - & 2a_{23} & = & 6 \\ 2a_{21} & - & a_{22} & + & 3a_{23} & = & -10 \\ a_{21} & + & 3a_{22} & + & 2a_{23} & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_{31} & + & 2a_{32} & - & 2a_{33} & = & -1 \\ 2a_{31} & - & a_{32} & + & 3a_{33} & = & 2 \\ a_{31} & + & 3a_{32} & + & 2a_{33} & = & 9 \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že matice všech tří soustav jsou stejné (sloupce této matice jsou právě vektory báze M), můžeme řešit všechny soustavy současně. K zápisu použijeme rozšířenou matici se třemi pravými stranami:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 & -10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 27 & 54 & -27 & 54 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & 19 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Tedy $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 2$, a hledanou maticí přechodu od M k M' je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení

5.2.1. Je dána báze $M = \{(1,2,1),(2,-1,3),(-2,3,2)\}$ aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete matici přechodu od báze M k bázi M' pro

(a) $M' = \{(0,-5,1),(-3,11,-1),(19,-19,-2)\}$;

(b) $M' = \{(2,7,-4),(-5,-1,4),(-30,32,11)\}$;

(c) $M' = \{(-2,8,1),(3,7,-8),(-43,72,55)\}$;

(d) $M' = \{(-5,11,7),(4,-11,-3),(-5,14,1)\}$.

Příklad 5.2.2. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

je maticí přechodu od jisté báze M aritmetického prostoru $\mathbb{R}^3$ k bázi $M' = \{(-4,2,1), (0,5,1), (5,0,-1)\}$. Určete bázi M.

Řešení. Nechť $M = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Víme, že když A je matice přechodu od báze M' k bázi M, pak inverzní matice A^{-1} je maticí přechodu od M k M'. Výpočtem zjistíme, že

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $\{\mathbf{v}_1\}_{M'} = (-2,1,-2)$, $\{\mathbf{v}_2\}_{M'} = (6,-2,5)$ a $\{\mathbf{v}_3\}_{M'} = (3,-1,2)$, což znamená, že

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= -2(-4,2,1) + (0,5,1) - 2(5,0,-1) = (-2,1,1), \\
\mathbf{v}_2 &= 6(-4,2,1) - 2(0,5,1) + 5(5,0,-1) = (1,2,-1), \\
\mathbf{v}_3 &= 3(-4,2,1) - (0,5,1) + 2(5,0,-1) = (-2,1,0).
\end{aligned}$$

□

Příklad 5.2.3. Určete vztah mezi souřadnicemi (tj. napište transformační rovnice pro souřadnice) libovolného vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázím $M = \{(1,2,-1), (-2,1,0), (-2,1,1)\}$ a $M' = \{(0,5,-1), (5,0,-1), (-4,2,1)\}$.

Řešení. Nejprve najdeme matici přechodu A od báze M k bázi M'. Souřadnice vektorů $(0,5,-1), (5,0,-1), (-4,2,1)$ z báze M' v bázi M určíme jako řešení tří soustav lineárních rovnic (které mají stejnou matici soustavy):

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -2 & -2 & 0 & 5 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro souřadnice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ platí vztah $\{\mathbf{x}\}_M = \{\mathbf{x}\}_{M'} \cdot A$. Označíme-li $\{\mathbf{x}\}_M = (x_1, x_2, x_3)$ a $\{\mathbf{x}\}_{M'} = (x'_1, x'_2, x'_3)$, pak dostaneme transformační rovnice

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2x'_1 + x'_2, \\
x_2 &= -2x'_2 + x'_3, \\
x_3 &= x'_1 + x'_3.
\end{aligned}$$

Matici přechodu od M' k M můžeme určit jako inverzní matici A^{-1} k matici A. Snadno zjistíme, že

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Transformační rovnice pak mají tvar

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - x_3), \\ x'_2 &= \frac{1}{3}(-x_1 - 2x_2 + 2x_3), \\ x'_3 &= \frac{1}{3}(-2x_1 - x_2 + 4x_3). \end{aligned}$$

□

Cvičení

5.2.2. Určete vztah mezi souřadnicemi libovolného vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázím

(a) $M = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a $M' = \{(1,2,-1),(-2,1,0),(-2,1,1)\}$;

(b) $M = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a $M' = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

5.3 Matice endomorfismů

Příklad 5.3.1. Určete matici endomorfismu $f\colon (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem

(a) ke kanonické bázi $M = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$;

(b) k bázi $M' = \{(1,-1,1),(2,1,-1),(-3,-2,1)\}$.

Řešení. (a) Obecně: Nechť $M = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ je báze prostoru $(V,+,T,\cdot)$. *Maticí endomorfismu $f\colon V \to V$ vzhledem k bázi M* se rozumí matice $A = ||a_{ij}|| \in M_{n\times n}(T)$, kde i-tý řádek $(a_{i1},\dots,a_{in})$ tvoří souřadnice vektoru $f(\mathbf{v}_i)$ vzhledem k bázi M.

V našem konkrétním případě máme $f((1,0,0)) = (1,0,1)$, $f((0,1,0)) = (1,1,0)$ a $f((0,0,1)) = (0,1,1)$. Protože M je kanonická báze, platí $\{(1,0,1)\}_M = (1,0,1)$, $\{(1,1,0)\}_M = (1,1,0)$ a $\{(0,1,1)\}_M = (0,1,1)$, tedy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice endomorfismu f vzhledem k bázi M.

(b) Nechť A' je matice endomorfismu vzhledem k bázi M'. Platí $f((1,-1,1)) = (0,0,2)$, $f((2,1,-1)) = (3,0,1)$ a $f((-3,-2,1)) = (-5,-1,-2)$. Řádky matice A' nejsou přímo tyto vektory, ale jejich souřadnice vzhledem k M', které určíme jako řešení vektorových rovnic

$$\begin{aligned}(0,0,2) &= a_{11}(1,-1,1) + a_{12}(2,1,-1) + a_{13}(-3,-2,1),\\ (3,0,1) &= a_{21}(1,-1,1) + a_{22}(2,1,-1) + a_{23}(-3,-2,1),\\ (-1,2,9) &= a_{31}(1,-1,1) + a_{32}(2,1,-1) + a_{33}(-3,-2,1).\end{aligned}$$

Budeme tedy současně řešit tři soustavy lineárních rovnic, jež mají stejnou matici soustavy (viz předchozí paragraf):

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 3 & -5\\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2\end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 3 & 0 & 0 & 2 & 4 & -6\\ 0 & 3 & 0 & -10 & -2 & 9\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3\end{array}\right)$$

Odtud $a_{11} = \frac{2}{3}$, $a_{12} = -\frac{10}{3}$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = \frac{4}{3}$, $a_{22} = -\frac{2}{3}$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = -2$, $a_{32} = 3$, $a_{33} = 3$. Tedy matice endomorfismu f vzhledem k bázi M' je

$$A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -10 & -6\\ 4 & -2 & -3\\ -6 & 9 & 9\end{pmatrix}.$$

Druhou možností, jak najít matici A', je využít následujícího vztahu pro matice endomorfismu vzhledem ke dvěma různým bázím: Jestliže A, A' jsou matice endomorfismu $f\colon V \to V$ vzhledem k bázím M, M' prostoru V, potom platí

$$A' = PAP^{-1}, \tag{X}$$

kde P je matice přechodu od báze M k bázi M'.

V našem případě víme, že

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

je matice endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi M. Matice přechodu od M k M' je zřejmě matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\end{pmatrix}$$

a odtud

$$A' = PAP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -10 & -6 \\ 4 & -2 & -3 \\ -6 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

P o z n á m k a. Pro lepší pochopení předcházejícího příkladu bude dobré, když si ukážeme jednoduché odvození vztahu (X). Nechť $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, $M' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ jsou báze prostoru $(V, +, T, \cdot)$ a P matice přechodu od M k M'. Nechť A, A' jsou matice endomorfismu f vzhledem k bázím M, M'. Platí

$$PA = \begin{pmatrix} \{\mathbf{v}'_1\}_M \\ \vdots \\ \{\mathbf{v}'_n\}_M \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \{f(\mathbf{v}'_1)\}_M \\ \vdots \\ \{f(\mathbf{v}'_n)\}_M \end{pmatrix},$$

tedy řádky matice PA jsou souřadnice vektorů $f(\mathbf{v}'_1), \dots, f(\mathbf{v}'_n)$ vzhledem k bázi M. Abychom dostali matici A' (matici endomorfismu f vzhledem k M', jejíž řádky jsou souřadnice vektorů $f(\mathbf{v}'_1), \dots, f(\mathbf{v}'_n)$ vzhledem k bázi M'), stačí nyní matici PA zprava vynásobit maticí přechodu od M' k M, tj. maticí P^{-1}. Tedy

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \{\mathbf{v}'_1\}_M \\ \vdots \\ \{\mathbf{v}'_n\}_M \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \{f(\mathbf{v}'_1)\}_M \\ \vdots \\ \{f(\mathbf{v}'_n)\}_M \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \{f(\mathbf{v}'_1)\}_{M'} \\ \vdots \\ \{f(\mathbf{v}'_n)\}_{M'} \end{pmatrix} = A'.$$

Cvičení

5.3.1. Určete matici endomorfismu $f\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi M, je-li:

(a) $M = \{(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)\}$;

(b) $M = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,-1)\}$;

(c) $M = \{(1,2,1), (2,1,1), (1,3,2)\}$.

5.3.2. Určete matice endomorfismu $f\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem k bázím $M = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a $M' = \{(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$.

Příklad 5.3.2. Určete endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takový, že $f((1,2,3)) = (2,3,3)$, $(0,2,3) \in \operatorname{Ker} f$ a $f \circ f = f$.

Řešení. Dimenze prostoru $\mathbb{R}^3$ je 3, tedy k určení endomorfismu f potřebujeme znát obrazy tří lineárně nezávislých vektorů. Podle zadání je $(1,2,3) \mapsto (2,3,3)$ a $(0,2,3) \mapsto (0,0,0)$. Navíc $f \circ f = f$, tedy pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ platí $f(f(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$. Proto $f((2,3,3)) = f(f((1,2,3))) = f((1,2,3)) = (2,3,3)$. Vektory $(1,2,3)$, $(0,2,3)$ a $(2,3,3)$

jsou lineárně nezávislé, tedy $M' = \{(1,2,3),(0,2,3),(2,3,3)\}$ je báze $\mathbb{R}^3$. Matice endomorfismu f vzhledem k M' je evidentně

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li P matici přechodu od kanonické báze $M = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ k bázi M', pak

$$A = P^{-1}A'P$$

bude matice endomorfismu f v kanonické bázi M. Zřejmě

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

a snadným výpočtem najdeme

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a odtud

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -3 \\ \frac{4}{3} & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření (vzhledem ke kanonické bázi) hledaného endomorfismu f je $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - 2x_2 + \frac{4}{3}x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 3x_2 + 2x_3)$. (Ověřte, že f skutečně vyhovuje podmínkám zadání.) $\square$

Příklad 5.3.3. Endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ má vzhledem ke kanonické bázi $M = \{(1,0),(0,1)\}$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Najděte bázi M', vzhledem k níž má f matici

$$A' = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Víme, že $A' = PAP^{-1}$, tj. $A'P = PA$, kde P je matice přechodu od M k M', kterou hledáme. Je-li

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

pak ze vztahu $A'P = PA$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} 38a - 81c & 38b - 81d \\ 16a - 34c & 16b - 34d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 9b & -a - b \\ 5c + 9d & -c - d \end{pmatrix}.$$

Budeme tedy řešit homogenní soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 33a & - & 9b & - & 81c & & & = & 0 \\ a & + & 39b & & & - & 81d & = & 0 \\ 16a & & & - & 39c & - & 9d & = & 0 \\ & & 16b & + & c & - & 33d & = & 0 \end{array}$$

Použijeme Gaussovu eliminační metodu:

$$\begin{pmatrix} 33 & -9 & -81 & 0 \\ 1 & 39 & 0 & -81 \\ 16 & 0 & -39 & -9 \\ 0 & 16 & 1 & -33 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 39 & 0 & -81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 1 & -33 \end{pmatrix}$$

Tedy $a = -39b + 81d$ a $c = -16b + 33d$. Zadání tudíž vyhovuje každá matice ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} -39b + 81d & b \\ -16b + 33d & d \end{pmatrix}, \text{ kde } b, d \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li např. $b = 2$ a $d = 1$, dostaneme

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy $M' = \{(3, 2), (1, 1)\}$. □

Cvičení

5.3.3. (a) Najděte endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, který má vzhledem k bázi $M' = \{(1, -1, 1), (2, 1, -1), (-3, -2, 1)\}$ matici

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Najděte endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takový, že $(1, -1, 1) \mapsto (4, -6, -1)$, $(2, 1, -1) \mapsto (-1, 0, -2)$ a $(-3, -2, 1) \mapsto (1, -1, 1)$.

5.3.4. Najděte automorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takový, že $(1, 0, 2) \mapsto (2, 3, 1)$, $(0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1)$ a platí $h^{-1} = h$.

5.3.5. Je dán endomorfismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (17x + 45y, -6x - 16y)$. Najděte bázi $M' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ takovou, aby platilo $f(\mathbf{v}_1) = 14\mathbf{v}_1 - 60\mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 - 13\mathbf{v}_2$.

5.4 Matice homomorfismů

Nechť $h\colon V \to W$ je homomorfismus a $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, $N = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ po řadě báze vektorových prostorů V, W nad tělesem T. *Maticí homomorfismu h vzhledem k bázím M, N* se rozumí matice $A = ||a_{ij}||_{m\times n} \in M_{m\times n}(T)$ taková, že i-tý řádek $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ tvoří souřadnice vektoru $h(\mathbf{v}_i)$ vzhledem k bázi N. Pro každý vektor $\mathbf{x} \in V$ potom platí

$$\{h(\mathbf{x})\}_N = \{\mathbf{x}\}_M \cdot A.$$

Opravdu, jestliže $\{\mathbf{x}\}_M = (x_1, \dots, x_m)$, pak

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= h(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m) = x_1 h(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_m h(\mathbf{v}_m) \\ &= x_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{1n}\mathbf{w}_n) + \cdots + x_m(a_{m1}\mathbf{w}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_n) \\ &= (x_1 a_{11} + \cdots + x_m a_{m1})\mathbf{w}_1 + \cdots + (x_1 a_{1n} + \cdots + x_m a_{mn})\mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

Jsou-li nyní $M' = \{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_m\}$ a $N' = \{\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n\}$ jiné báze prostorů V a W, pak matice

$$A' = PAQ,$$

kde P je matice přechodu od M k M' a Q je matice přechodu od N' k N, je maticí homomorfismu h vzhledem k bázím M', N'. (Řádky matice PA jsou souřadnice $h(\mathbf{v}'_1), \dots, h(\mathbf{v}'_m)$ vzhledem k N a tedy řádky matice PAQ jsou souřadnice těchto vektorů vzhledem k N'; srovnejte s poznámkou za příkladem 5.3.1.)

Příklad 5.4.1. Určete homomorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, který má vzhledem k bázím $M' = \{(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$ a $N' = \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,0,1)\}$ matici

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nechť M, N jsou po řadě kanonické báze aritmetických vektorových prostorů $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ a nechť A je matice homomorfismu h vzhledem k bázím M, N. Označíme-li P matici přechodu od M k M' a Q matici přechodu od N' k N, platí $A' = PAQ$, tedy $A = P^{-1}A'Q^{-1}$. Zřejmě

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a známým způsobem vypočteme

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Matici Q v tomto okamžiku nepotřebujeme.) Odtud ihned dostaneme

$$A = P^{-1}A'Q^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & 8 \\ -4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

a tedy analytické vyjádření homomorfismu h vzhledem ke kanonickým bázím M, N je: $h((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, \frac{1}{4}(x_1 - 3x_2 + 5x_3), \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + 3x_3), -x_1 + 2x_2)$. □

Cvičení

5.4.1. Určete matici homomorfismu $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, který je dán předpisem $h((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1)$, vzhledem

(a) ke kanonickým bázím $M = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a $N = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$;

(b) k bázím $M' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,-1,0)\}$ a $N' = \{(1,1,0,1), (1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,1,1,1)\}$.

5.4.2. Určete homomorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, který má vzhledem ke kanonickým bázím aritmetických prostorů $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5.4.2. Je dána báze $M' = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Najděte bázi duálního prostoru k prostoru $\mathbb{R}^4$, která je duální k bázi M'.

Řešení. Duální prostor k prostoru $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor lineárních forem na $\mathbb{R}^n$ (tj. homomorfismů $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, viz příklad 5.1.4). Je-li $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ některá báze $\mathbb{R}^n$, pak duální báze je tvořena lineárními formami $f_1, \dots, f_n$ takovými, že platí

$$f_i(\mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \tag{D}$$

V našem případě duální bázi k dané bázi M' tvoří lineární formy f_1, f_2, f_3, f_4, které mají analytické vyjádření $f_i((x_1, x_2, x_3, x_4)) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Podle podmínky (D) máme:

$$\begin{aligned}
1 &= f_1((1,0,0,0)) = a_{11} & & \\
0 &= f_1((1,1,0,0)) = a_{11} + a_{12} & \Rightarrow\quad & a_{12} = -1 \\
0 &= f_1((1,1,1,0)) = a_{11} + a_{12} + a_{13} & \Rightarrow\quad & a_{13} = 0 \\
0 &= f_1((1,1,1,1)) = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} & \Rightarrow\quad & a_{14} = 0
\end{aligned}$$

Tedy $f_1((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1 - x_2$. Obdobně dostaneme: $f_2((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_2 - x_3$, $f_3((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_3 - x_4$ a $f_4((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_4$.

Můžeme rovněž použít matice lineárních forem. Díky podmínce (D) je jasné, že lineární formy f_1, f_2, f_3, f_4 tvořící duální bázi k M mají vzhledem k bázi M' prostoru $\mathbb{R}^4$ a kanonické bázi prostoru $\mathbb{R}$ matice

$$A_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice přechodu od M' ke kanonické bázi $M = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$. Lineární formy f_1, f_2, f_3, f_4 potom mají vzhledem ke kanonickým bázím prostorů $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}$ matice

$$A_1 = PA_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = PA_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = PA_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A_4 = PA_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

5.5 Vlastní čísla a vektory endomorfismů

Příklad 5.5.1. Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících endomorfismů:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)$;

(b) $g\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $g((z_1, z_2, z_3)) = (4z_1 + z_2 - 4z_3, -5z_1 - 4z_2, 7z_1 + 9z_2 + 5z_3)$.

Řešení. (a) Hledáme čísla $\lambda \in \mathbb{R}$ a vektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tak, aby $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Je-li tedy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, pak musí platit

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & \lambda x_1, \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & \lambda x_2, \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & = & \lambda x_3, \end{array}$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & - & (3+\lambda)x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ -x_1 & & & - & (2+\lambda)x_3 & = & 0. \end{array} \tag{S}$$

Tato homogenní soustava má netriviální řešení, právě když její matice je singulární. Snadno přesvědčíme, že

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3.$$

Tento determinant je *charakteristický polynom* endomorfismu f. Vidíme, že soustava (S) má netriviální řešení pro $\lambda = -1$; toto číslo je hledané *vlastní číslo* endomorfismu f. *Vlastní vektory* odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = -1$ najdeme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ -x_1 & & & - & x_3 & = & 0, \end{array} \tag{S'}$$

která vznikne z (S) dosazením -1 za λ. Gaussovou eliminační metodou zjistíme, že řešením (S') jsou vektory $\mathbf{x} = (-x_3, -x_3, x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$. (Ověřte, že pro tyto vektory skutečně platí $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.) Tedy vlastní vektory endomorfismu f odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = -1$ tvoří podprostor $W_\lambda = [\{(1, 1, -1)\}]$.

Obecně lze postup popsat takto: Určíme matici A daného endomorfismu f vzhledem k některé bázi M. Determinant $\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^T$ se nazývá *charakteristický polynom* endomorfismu f (snadno lze ukázat, že charakteristický polynom nezávisí na volbě báze M). Kořeny charakteristického polynomu jsou *vlastní čísla* endomorfismu f. *Vlastní vektory*, které odpovídají konkrétnímu vlastnímu číslu λ_0, vypočteme jako řešení homogenní soustavy s maticí $(A - \lambda_0 E)^T$. Uvědomme si, že je-li A matice endomorfismu f vzhledem k bázi M, což obecně není kanonická báze, pak tímto způsobem dostaneme souřadnice hledaných vlastních vektorů v bázi M!

V našem případě má endomorfismus f vzhledem ke kanonické bázi $M = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

a proto

$$(A - \lambda E)^T = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom $-(\lambda+1)^3$ má jediný kořen, a to -1. Příslušné vlastní vektory jsou tedy řešení homogenní soustavy (S') s maticí

$$(A - (-1)E)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Endomorfismus g má vzhledem ke kanonické bázi prostoru $\mathbb{C}^3$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom tedy je

$$\det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E)^T = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -4 \\ -5 & -4-\lambda & 0 \\ 7 & 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13.$$

Jeho kořeny (vlastní čísla) jsou $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2+3i$ a $\lambda_2 = 2-3i$. Zbývá určit odpovídající vlastní vektory.

Pro $\lambda_0 = 1$ řešíme homogenní soustavu s maticí

$$(A - E)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -5 & -5 & 0 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy podporostor vlastních vektorů odpovídajících $\lambda_0 = 1$ je $W_{\lambda_0} = \big\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3\colon z_1 = -z_2, z_3 = -\frac{1}{2}z_2\big\} = [\{(2, -2, 1)\}]$.

Pro $\lambda_1 = 2 + 3i$ řešíme homogenní soustavu s maticí

$$(A - (2+3i)E)^T = \begin{pmatrix} 2-3i & 1 & -4 \\ -5 & -6-3i & 0 \\ 7 & 9 & 3-3i \end{pmatrix} \overset{1}{\sim} \begin{pmatrix} 2-3i & 1 & -4 \\ -5 & -6-3i & 0 \\ 0 & 1-7i & 5-5i \end{pmatrix}$$
$$\overset{2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -4+3i & -5 \\ -5 & -6-3i & 0 \\ 0 & 1-7i & 5-5i \end{pmatrix} \overset{3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -4+3i & -5 \\ -5 & -6-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 … k pětinásobku 3. ř. přičteme sedminásobek 2. ř., tento nový řádek vydělíme třemi;
2 … k pětinásobku 1. ř. přičteme $(2 - 3i)$-násobek 2. ř. a nový řádek vydělíme čtyřmi;
3 … ke 3. ř. přičteme $(1 - i)$-násobek 1. ř.

Jak nyní vidíme, podprostor příslušných vlastních vektorů je $W_{\lambda_1} = \big\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3\colon z_1 = -\frac{6+3i}{5}z_2, z_3 = -\frac{4-3i}{5}z_2\big\} = [\{(6 + 3i, -5, 4 - 3i)\}]$.

Pro $\lambda_2 = 2 - 3i$ analogicky dostaneme

$$(A - (2-3i)E)^T = \begin{pmatrix} 2+3i & 1 & -4 \\ -5 & -6+3i & 0 \\ 7 & 9 & 3+3i \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 0 & 4+3i & 5 \\ 5 & 6-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tedy $W_{\lambda_2} = \big\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3\colon z_1 = -\frac{6-3i}{5}z_2, z_3 = -\frac{4+3i}{5}z_2\big\} = [\{(6-3i, -5, 4+3i)\}]$. $\square$

Cvičení

5.5.1. Určete vlastní čísla a vlastní vektory endomorfismů:

(a) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h((x,y,z)) = (y, -4x+4y, -2x+y+2z)$;

(b) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h((x,y,z)) = (7x-12y+6z, 10x-19y+10z, 12x-24y+13z)$;

(c) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h((x,y,z)) = (x-3y+3z, -2x-6y+13z, -x-4y+8z)$;

(d) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h((x,y,z)) = (4x-2y+2z, 2x+2z, -x+y+z)$;

(e) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h((x,y,z)) = (4x-5y+2z, 5x-7y+3z, 6x-9y+4z)$;

(f) $h\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $h((x,y,z)) = (3x+y-3z, 3x+y-z, 2x-2y)$.

Příklad 5.5.2. Endomorfismus $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ má vzhledem k bázi $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory endomorfismu h.

Řešení. Nejprve určíme charakteristický polynom (který, jak víme, nezávisí na volbě báze):

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ \lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \\ \lambda+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)^2\begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ \lambda+1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda^2-4) = (\lambda-2)^3(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Endomorfismus h má tedy vlastní čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$.

Najdeme příslušné vlastní vektory. Obdobně jako v předchozích příkladech budeme řešit homogenní soustavu s maticí $(A-\lambda_j E)^T$ (pro $j = 1, 2$), přičemž řešení této soustavy jsou *souřadnice* hledaných vlastních vektorů *vzhledem k bázi* M.

Pro $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \{\mathbf{x}\}_M = (x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4)$ pro někt. $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \mathbf{x} = (x_2 + x_3 + x_4)\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3 + x_4\mathbf{u}_4$ pro někt. $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = [\{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_4\}]$.

Pro $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $W_{-2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \{\mathbf{x}\}_M = (x_1, -x_1, -x_1, -x_1)$ pro někt. $x_1 \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 - x_1\mathbf{u}_2 - x_3\mathbf{u}_3 - x_4\mathbf{u}_4$ pro někt. $x_1 \in \mathbb{R}\} = [\{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4\}]$. $\square$

Cvičení

5.5.2. Endomorfismy $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $g \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mají vzhledem k bázím $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ a $N = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ po řadě matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory endomorfismů f a g.

5.6 Výsledky

5.1.1: Homomorfismy jsou pouze případy (b) a (e), přičemž žádný z nich není izomorfismem.

5.1.2: (a) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(x_1,0,0,0)\colon x_1 \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$ – surjektivní homomorfismus;
(b) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(x_1,x_2,x_3,-x_1-x_2-x_3)\colon x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$ – surjektivní hom.;
(c) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{(x_1,x_1,x_2,x_3)\colon x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$ – injektivní hom.;
(d) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,x_2,x_3)\colon x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{(x_1,x_1,x_1,x_1)\colon x_1 \in \mathbb{R}\}$ – homomorfismus, kt. není ani injektivní ani surjektivní;
(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$ – izomorfismus;
(f) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$ – izomorfismus;
(g) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_1+\cdots+x_n = 0\} = [\{(1,-1,0,\dots,0),(1,0,-1,0,\dots,0),\dots,(1,0,\dots,0,-1)\}]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$ – surjektivní homomorfismus;
(h) $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,\dots,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = [\{(1,\dots,1),(0,1,\dots,1),\dots,(0,\dots,0,1)\}] = \mathbb{R}^n$ – izomorfismus.

5.1.4: Hledaným izomorfismem je zobrazení $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \in T_n[x] \mapsto (a_n,\dots,a_1,a_0) \in T^{n+1}$.

5.1.5: Stačí ukázat, že pro lib. $\varphi,\psi \in Aut(V)$ platí $\varphi\circ\psi \in Aut(V)$ a $\varphi^{-1} \in Aut(V)$; jednotkovým prvkem je identické zobrazení $id\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$.

5.1.6: Ano.

5.2.1:

$$(a)\begin{pmatrix}-2&1&0\\3&-2&1\\1&3&-6\end{pmatrix}\quad(b)\begin{pmatrix}4&-2&-1\\-3&1&2\\-2&-3&11\end{pmatrix}\quad(c)\begin{pmatrix}2&-1&1\\5&-3&-2\\1&2&24\end{pmatrix}\quad(d)\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&1&-2\\3&-2&2\end{pmatrix}$$

5.2.2: (a) $x_1 = x_1'-2x_2'-2x_3'$, $x_2 = 2x_1'+x_2'+x_3'$, $x_3 = -x_1'+x_3'$ a $x_1' = \frac{1}{5}(x_1+2x_2)$, $x_2' = \frac{1}{5}(-3x_1-x_2-5x_3)$, $x_3' = \frac{1}{5}(x_1+2x_2+5x_3)$;
(b) $x_1 = x_2'+x_3'$, $x_2 = x_1'+x_3'$, $x_3 = x_1'+x_2'$ a $x_1' = \frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3)$, $x_2' = \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)$, $x_3' = \frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)$.

5.3.1:

$$(a)\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&2\\-3&1&0\end{pmatrix}\quad(b)\ \begin{pmatrix}2&1&4\\2&-1&3\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad(c)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}32&-4&-9\\17&-3&-7\\47&-5&-27\end{pmatrix}$$

5.3.2:

$$A = A' = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

5.3.3: (a) Určíme matici přechodu P od kanonické báze M k bázi M' a matici přechodu P^{-1} od M' k M:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A = P^{-1}A'P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je matice f vzhledem ke kanonické bázi M, tedy $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3)$.
(b) Vektory $(1, -1, 1)$, $(2, 1, -1)$ a $(-3, -2, 1)$ troří bázi $\mathbb{R}^3$, vzhledem k níž má f matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbytek stejně jako v bodě (a).

5.3.4: Protože $h = h^{-1}$, platí $(2, 3, 1) \mapsto (1, 0, 2)$. Vzhledem k bázi $M' = \{(1, 0, 2), (0, 0, 1), (2, 3, 1)\}$ má h matici

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od kanonické báze M k M' a od M' k M jsou

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice h vzhledem ke kanonické bázi je potom

$$A = P^{-1}A'P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_2, 3x_1 - 2x_2, -x_1 + x_2 + x_3)$.

5.3.5: Vzhledem k bázím $M = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a M' má f matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{smallmatrix}\right)$ a $A' = \left(\begin{smallmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{smallmatrix}\right)$. Označme $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ matici přechodu od M k M'. Pak platí $PA = A'P$. Řešíme tedy homogenní soustavu 4 rovnic s neznámými a, b, c, d; dostáváme $a = -15b - 20c$, $d = -b - 2c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li např. $b = 1$ a $c = -1$, máme $P = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, tj. $M' = \{(5, 1), (-1, 1)\}$.

5.4.1:

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.4.2: $h((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2, 7x_3)$

5.5.1: (a) Charakteristický polynom $-(\lambda-2)^3$, vlastní číslo $\lambda = 2$, podprostor vlastních vektorů $W_2 = [\{(1,2,0),(0,0,1)\}]$.
(b) $-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $W_1 = [\{(2,1,0),(1,0,-1)\}]$, $W_{-1} = [\{(3,5,6)\}]$.
(c) $-(\lambda-1)^3$, $\lambda = 1$, $W_1 = [\{(3,1,1)\}]$.
(d) $(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $W_1 = [\{(2,2,-1)\}]$, $W_2 = [\{(1,1,0),(-1,0,1)\}]$.
(e) $\lambda^2(1-\lambda)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $W_0 = [\{(1,2,3)\}]$, $W_1 = [\{(1,1,1)\}]$.
(f) $(4-\lambda)(\lambda^2+4)$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$, $W_4 = [\{(1,1,0)\}]$, $W_{2i} = [\{(i,1,1+i)\}]$, $W_{-2i} = [\{(-i,1,1-i)\}]$.

5.5.2: (a) Char. polynom $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$, vl. čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = 3$, vl. vektory $W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \{\mathbf{x}\}_M = (x_1, 0, -x_1)\} = [\{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3\}]$, $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \{\mathbf{x}\}_M = (x_1, x_1, -x_1)\} = [\{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}]$, $W_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon \{\mathbf{x}\}_M = (0, x_2, -x_2)\} = [\{\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}]$.
(b) Char. pol. $\lambda^2(1-\lambda)^2$, vl. čísla $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, vl. vektory $W_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \{\mathbf{x}\}_N = (0, x_2, x_3, 0)\} = [\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}]$, $W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \{\mathbf{x}\}_N = (0,0,0,x_4)\} = [\{\mathbf{v}_4\}]$.

6

Eukleidovské vektorové prostory

6.1 Skalární součin

Připomeňme, že *skalárním součinem* na reálném vektorovém prostoru $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ se rozumí zobrazení $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které má následující vlastnosti:

(i) $\forall \mathbf{u} \in V;\ \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0\ \&\ (\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o})$;

(ii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V;\ \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{u})$;

(iii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V;\ \sigma(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{w})$;

(iv) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\ \forall c \in \mathbb{R};\ \sigma(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Příklad 6.1.1. Nechť $(C(a,b), +, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ (viz cvičení 4.1.3). Definujme zobrazení $\sigma\colon C(a,b) \times C(a,b) \to \mathbb{R}$ takto:

$$\sigma(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že σ je skalární součin na $C(a,b)$.

Řešení. Jsou-li funkce f, g spojité v intervalu $[a,b]$, pak jsou zde integrovatelné a taktéž funkce $f+g$ a fg jsou (spojité, a tedy) integrovatelné v $[a,b]$. Ověříme vlastnosti (i) – (iv). Nechť $f, g, h \in C(a,b)$, $c \in \mathbb{R}$.

(i) $\sigma(f,f) = \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \geq 0$, protože $f(x)^2 \geq 0$ pro každé $x \in [a,b]$. Pokud $f(x_0) \neq 0$ pro někt. $x_0 \in [a,b]$, pak $\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x > 0$, tedy celkem $\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$, právě když $f(x) = 0$ pro každé $x \in [a,b]$.

(ii) $\sigma(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma(g,f)$.

(iii) $\sigma(f+g,h) = \int_a^b (f+g)(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \sigma(f,h) + \sigma(g,h)$.

(iv) $\sigma(cf,g) = \int_a^b (cf)(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b cf(x)g(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = c\sigma(f,g)$. □

Cvičení

6.1.1. Zjistěte, zda následující zobrazení jsou skalární součiny na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^2$ (v obou případech $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$):

(a) $\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1$;

(b) $\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 2u_2 v_2$.

6.1.2. Ukažte, že zobrazení $\sigma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, je skalární součin na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^n$.

P o z n á m k a. Nebude-li výslovně uvedeno jinak, budeme dále na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^n$ vždy uvažovat „standardní“ skalární součin definovaný ve cvičení 6.1.2. Místo $\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ budeme psát $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Příklad 6.1.2. Najděte ortogonální doplněk podprostoru $W = [\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}]$ v aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Nejprve připomeňme pojem ortogonálního doplňku. Buď V vektorový prostor konečné dimenze se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ortogonálním doplňkem podprostoru $W = [\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}]$ je množina $W^\perp$ všech vektorů ortogonálních k vektorům $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, tj.

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V\colon \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \text{ pro každé } 1 \le i \le k\}.$$

$W^\perp$ je vždy podprostor V (dokažte!) a platí $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

V našem případě tedy hledáme vektory $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ takové, že

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, 0, 1, 0) \rangle &= 0, \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1, 0, 1) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0, \\ x_2 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Je tedy zřejmé, že

$$W^\perp = \{(x_1, x_2, -x_1, -x_2)\colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Jako bázi podprostoru $W^\perp$ můžeme vzít $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$. □

Cvičení

6.1.3. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $W = [\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}]$. Dokažte, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ jsou následující výroky ekvivalentní:

(a) $\forall \mathbf{w} \in W;\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$;

(b) $\forall i \in \{1, \ldots, k\};\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = 0$.

6.1.4. Určete ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru $W = [\{(2,1,3), (2,1,0)\}]$ v $\mathbb{R}^3$.

P o z n á m k a. Uvědomte si, že na daném vektorovém prostoru může existovat více skalárních součinů a že ortogonalita vektorů závisí na volbě skalárního součinu. Např. na aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^2$ jsme se kromě standardního skalárního součinu setkali s jiným skalárním součinem ve cvičení 6.1.1(b). V prvním případě jsou vektory $(1,0), (0,1)$ ortogonální (platí $\langle (1,0), (0,1) \rangle = 1{\cdot}0{+}0{\cdot}1 = 0$), zatímco ve druhém případě ortogonální nejsou, protože $\tau((1,0),(0,1)) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = -1$.

6.2 Ortogonální a ortonormální báze

Příklad 6.2.1. Najděte některou ortonormální bázi podprostoru

$$W = [\{(1,-2,2,0), (1,-2,2,3), (-1,1,0,0)\}]$$

v aritmetickém prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Nejprve najdeme některou bázi prostoru W (nevíme, jsou-li zadané tři vektory lineárně nezávislé). Vidíme, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy původní tři vektory tvoří bázi W, ale můžeme vzít také vektory

$$\mathbf{u}_1 = (0,0,0,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,1,0,0),\ \mathbf{u}_3 = (0,-1,2,0).$$

(Jak uvidíme za chvíli, je výhodné volit vektory „s co nejvíce nulami“.)

Postup ortogonalizace báze je popsán v důkaze Schmidtovy věty. Jeden z vektorů si vybereme a označíme jej $\mathbf{v}_1$; v našem případě vezmeme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Dále vybereme jeden ze zbývajících vektorů, např. $\mathbf{u}_2$, a najdeme vektor $\mathbf{v}_2$ takový, že $[\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2\}] = [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$ a $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$. Tedy hledáme vektor $\mathbf{v}_2$, který patří do podprostoru generovaného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2$ a je ortogonální k $\mathbf{v}_1$. V našem případě stačí vzít $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$.

Nyní najdeme vektor $\mathbf{v}_3$ takový, aby $[\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}] = [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3\}]$ a přitom $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$ a $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. Vektor $\mathbf{v}_3$ je tedy ve tvaru $\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{u}_3$ pro někt. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ a platí

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle + c_3\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle, \\ 0 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle &= \langle c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle + c_3\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Výpočtem skalárních součinů na pravé straně dostáváme

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ 2c_2 - c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tj. $c_3 = 2c_2$ a $\mathbf{v}_3 = c_2\mathbf{v}_2 + 2c_2\mathbf{v}_3 = c_2(\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3)$. Můžeme zvolit $c_2 = -1$ a dostaneme $\mathbf{v}_3 = (1, 1, -4, 0)$. Ortogonální bází prostoru W je proto množina

$$\{(0, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (1, 1, -4, 0)\}.$$

Nakonec každý z vektorů $\mathbf{v}_i$ nahradíme vektorem $\frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i$, kde $\|\mathbf{v}_i\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle}$ je velikost vektoru $\mathbf{v}_i$. Získáme tak hledanou ortonormální bázi:

$$\left\{(0, 0, 0, 1), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0), \tfrac{1}{\sqrt{18}}(1, 1, -4, 0)\right\}.$$

□

Obecně lze ortogonalizaci báze, tzv. *Schmidtův ortogonalizační proces*, popsat následujícím způsobem:

Nechť $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je báze podprostoru W eukleidovského prostoru konečné dimenze V. Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ postupně nahradíme vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, které budou tvořit ortogonální bázi podprostoru W, takto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1, \\
\mathbf{v}_2 &= -\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2, \\
\mathbf{v}_3 &= -\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3, \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_k &= -\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1} \rangle}\mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{u}_k.
\end{aligned}$$

Vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ můžeme libovolně přečíslovat a nahrazovat je v jiném pořadí. Samozřejmě takto získáme jinou bázi podprostoru W.

Pokud ze zadání není zřejmé, zda množina $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ je báze podprostoru W, je vždy nutné to ověřit a v případě, kdy by to báze nebyla, vybrat vhodnou bázi W (tj. některou lineárně nezávislou podmnožinu $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$).

Příklad 6.2.2. Najděte ortonormální bázi prostoru

$$W = [\{(1, -2, 2, 0), (1, -2, 2, 3), (-1, 1, 0, 0)\} \subseteq\subseteq \mathbb{R}^4$$

obsahující kladný násobek vektoru $(1, -2, 2, 0)$.

Řešení. Z příkladu 6.2.1 víme, že prostor W je generován lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 0, 1)$ a $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0, 0)$ (ze zřejmých důvodů zde volíme jiné označení než v příkladě 6.2.1). Protože $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$, položíme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$. Pro vektor $\mathbf{v}_3$ pak platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= -\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3 \\ &= -\frac{-3}{9}(1, -2, 2, 0) - \frac{0}{1}(0, 0, 0, 1) + (-1, 1, 0, 0) = \frac{1}{3}(-2, 1, 2, 0) \end{aligned}$$

Nyní už stačí vypočítat velikosti vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a dostaneme hledanou ortonormální bázi prostoru W, jíž je množina $\left\{\frac{1}{3}(1, -2, 2, 0), (0, 0, 0, 1), \frac{1}{3}(-2, 1, 2, 0)\right\}$. □

Příklad 6.2.3. Najděte ortogonální bázi aritmetického prostoru $\mathbb{R}^4$, která obsahuje vektrory $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 2)$ a $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3, -3)$.

Řešení. Jelikož $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, ortogonální báze obsahující $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ existuje. Můžeme postupovat tak, že najdeme některou bázi, která by obsahovala $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, a následně tuto bázi ortogonalizovat. Ukážeme si ale jiný postup: najdeme ortogonální bázi $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ ortogonálního doplňku $W^\perp$ podprostoru $W = [\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}]$ a hledanou ortogonální bází $\mathbb{R}^4$ potom bude množina $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

Ortogonální doplněk je tvořen vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ takovými, že $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle = 0$, tj.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Zvolíme-li x_3, x_4 jako parametry, dostaneme obecné řešení $x_1 = x_3 - 7x_4$ a $x_2 = -2x_3 + 5x_4$. Tedy

$$W^\perp = \{(x_3 - 7x_4, -2x_3 + 5x_4, x_3, x_4) \colon x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = [\{(1, -2, 1, 0), (-7, 5, 0, 1)\}]$$

Vektory $(1, -2, 1, 0)$ a $(-7, 5, 0, 1)$ nejsou ortogonální. Položíme $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1, 0)$ a vektor $\mathbf{u} = (-7, 5, 0, 1)$ nahradíme vektorem $\mathbf{v}_4 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle\big(- \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle}\mathbf{v}_3 + \mathbf{u}\big) = 6(-\frac{-17}{6}(1, -2, 1, 0) + (-7, 5, 0, 1)) = (-25, -4, 17, 6)$.

Nyní se snadno ověří, že množina $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ je otrogonální báze prostoru $\mathbb{R}^4$. □

Cvičení

6.2.1. Najděte některou ortonormální bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $(1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8)$.

6.2.2. Najděte ortonormální bázi podprostoru $W = [\{(5, 1, -1), (0, 1, -1)\}]$ a doplňte ji na ortonormální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

6.2.3. Najděte ortonormální bázi prostoru $W = [\{(1, -2, 2), (1, 0, 1), (5, -3, -7)\}]$.

6.2.4. Najděte ortonormální bázi prostoru $W = [\{(1, 1, 0, 1), (1, -2, 0, 0), (0, 1, 1, -1)\}]$.

6.2.5. Najděte některou ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektory $(1, -2, 2, -3)$ a $(2, -3, 2, 4)$.

6.3 Endomorfismy eukleidovských prostorů

Příklad 6.3.1. Endomorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ chápeme jako eukleidovský prostor s obyčejným skalárním součinem) má vzhledem k bázi $M' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ matici

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište analytické vyjádření h a asociovaného endomorfismu h^* vzhledem ke kanonické bázi $M = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Rozhodněte, zda h je ortogonální nebo symetrický endomorfismus.

Řešení. Nejprve určíme matici A endomorfismu h vzhledem ke kanonické bázi M. Víme, že platí $A = P^{-1}A'P$, kde P je matice přechodu od báze M k bázi M'. Jak snadno zjistíme,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a odtud

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h((x,y,z)) = (x+2y, -y+z, x+y+z)$.

Připomeňme, že *asociovaným endomorfismem* k endomorfismu h se rozumí endomorfismus h^* takový, že $\langle h(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, h^*(\mathbf{y})\rangle$ pro všechny vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (lze ukázat, že k danému h takový endomorfismus h^* existuje právě jeden). Platí, že je-li B matice h vzhledem k některé o r t o n o r m á l n í bázi, pak B^T je maticí h^* vzhledem k téže bázi.

V našem případě tedy

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

je matice asociovaného endomorfismu h^* vzhledem ke kanonické bázi M, a proto $h^*((x,y,z)) = (x+z, 2x-y+z, y+z)$.

Endomorfismus h je *symetrický*, když $h = h^*$. Z výše uvedeného plyne, že h je symetrický, právě když jeho matice v některé ortonormální bázi je symetrická (tj. shoduje se s transponovanou maticí). Endomorfismus je *ortogonální*, když $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})\rangle$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Platí, že h je ortogonální, právě když jeho matice v některé ortonormální bázi je ortogonální (tj. součin s transponovanou maticí je roven jednotkové matici).

Je tedy zřejmé, že zadaný endomorfismus $h\colon (x,y,z) \mapsto (x+2y, -y+z, x+y+z)$ není symetrický, neboť $A \neq A^T$. Navíc

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a proto h není ani ortogonální. $\square$

Cvičení

6.3.1. Endomorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi $M' = \{(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$ matici

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda h je symetrický nebo ortogonální endomorfismus.

6.3.2. Endomorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi $M' = \{(1,1,-1),\ (2,1,0),\ (1,-1,1)\}$ matici

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3a & 2a & -a-2 \\ -6a & 2+4a & -2a \\ 2-3a & 2a & 4-a \end{pmatrix}.$$

Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby h byl symetrický endomorfismus.

6.3.3. Rozhodněte, zda následující endomorfismy jsou ortogonální:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x,y,z)) = (x+y, z, -y)$;

b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g((x,y,z)) = \frac{1}{3}(2x-y+2z, x-2y-2z, 2x+2y-z)$.

6.3.4. Určete $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby matice

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 2b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & c & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -a & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \end{pmatrix}$$

byla ortogonální.

6.3.5. Endomorfismus $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má vzhledem k bázi $M' = \{(1,-1,1),\ (2,1,-1),\ (-3,-2,1)\}$ matici

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište analytické vyjádření h a asociovaného endomorfismu h^* vzhledem ke kanonické bázi M a určete matici h^* vzhledem k bázi M'.

6.4 Výsledky

6.1.1: (a) Ne, σ nemá vlastnost (iv): např. $\sigma((0,1),(0,1)) = 0$. (b) Ano.

6.1.3: (b) $\Rightarrow$ (a) Jestliže $\mathbf{w} \in W$, pak $\mathbf{w} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$ a $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k \rangle = c_1\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle + \cdots + c_k\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle = 0$. (a) $\Rightarrow$ (b) Triviální.

6.1.4: $W^{\perp} = [\{(1,-2,0)\}]$.

6.2.1: Báze $\{(1,1,-1,-2),(5,8,-2,-3)\}$, ortonormální báze $\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}(1,1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{39}}(2,5,1,3)\right\}$.

6.2.2: Ortonormální báze W je $\left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\}$, ortonormální báze $\mathbb{R}^3$ pak je $\left\{(1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right\}$.

6.2.3: Vektory $(1,-2,2),(1,0,1),(5,-3,-7)$ jsou lineárně nezávislé, proto $W = \mathbb{R}^3$ a ortonormální bází je $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

6.2.4: Např. $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,1), \frac{1}{\sqrt{42}}(4,-5,0,1), \frac{1}{\sqrt{57}}(4,2,1,-6)\right\}$.

6.2.5: $\{(1,-2,2,-3),(2,-3,2,4),(2,2,1,0),(-5,2,6,1)\}$

6.3.1: Je symetrický, není ortogonální.

6.3.2: h má vzhledem ke kanonické bázi matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tedy $a = 2$.

6.3.3: a) není; b) je.

6.3.4: Dvě řešení: 1) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.3.5: $h((x,y,z)) = (x - y + 2z, -2x + 3y - z, -x + 2y + 2z)$,
$h^*((x,y,z)) = (x - 2y - z, -x + 3y + 2z, 2x - y + 2z)$,

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{14}{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Výběr z literatury

[1] Bečvář, J.: *Sbírka úloh z lineární algebry* (skriptum), Praha, 1975.

[2] Bican, J.: *Lineární algebra*, Praha, 1979.

[3] Birkhoff, G., MacLane, S.: *Prehľad modernej algebry*, Bratislava, 1979.

[4] Blažek, J. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika I*, Praha, 1983.

[5] Blažek, J. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika II*, Praha, 1985.

[6] Coufalová, Y.: *Cvičení z algebry*, Brno, 1986.

[7] Hort, D., Rachůnek, J.: *Algebra I* (skriptum), Olomouc, 2003.

[8] Katriňák, T. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika (1)*, Bratislava, 1985.

[9] Proskurjakov, I.V.: *Sbornik zadač po linějnoj algebre*, Moskva, 1970.

[10] Šalát, T. a kol.: *Algebra a teoretická aritmetika (2)*, Bratislava, 1986.

[11] Šik, F.: *Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu*, Brno, 1998.