Kapitola 1

Algebraické výrazy

Hlavním cílem této kapitoly je naučit se rychle a bezchybně upravovat složité algebraické výrazy. To ovšem předpokládá bezproblémové zvládnutí základních úprav jednoduchých výrazů za pomocí elementárních vztahů. Jedná se především o opakování středoškolské látky, ale objeví se zde i nové poznatky, které student využije v dalším studiu. Ve stručnosti se zde seznámíme s úpravami mocnin a odmocnin, binomickou větou, racionálními lomenými a celistvými výrazy (polynomy spolu s hledáním jejich kořenů). V podstatě jde zejména o shrnutí znalostí, opakování a výčet nutných vědomostí, které by si měl student pamatovat z výuky na střední škole.

1.1 Úprava algebraických výrazů

Lze následující výraz zapsat jednodušší formou?

$$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}$$

Algebraické výrazy

Algebraickým výrazem rozumíme každý zápis, který je podle pravidel správně utvořen ze znaků pro matematické operace, čísel, proměnných, závorek, výsledků operací a hodnot funkcí. Algebraické výrazy, v nichž se nevyskytují odmocniny, se nazývají *racionální algebraické výrazy*. Ty se dále dělí na *racionální celistvé výrazy*, tedy *mnohočleny* (*polynomy*), a *racionální lomené výrazy*, tedy podíly dvou mnohočlenů, kde dělitelem je nenulový mnohočlen. Pokud se ve výrazech objevují i odmocniny, nazýváme je *iracionální algebraické výrazy*.

U algebraických výrazů je nutné stanovit *definiční obory proměnných* **D**, tj. podmnožiny oborů proměnných, pro jejichž prvky má daný výraz smysl.

Stanovení oboru proměnných

Příklad 1.1.1. Určeme obory proměnných výrazů: a) $3(2x-1)-3x^3$, a^2-b^2, $5x-7y$ (racionální celistvé výrazy)

b) $\dfrac{x^2-3x-6}{x-2}$ (racionální lomené výrazy)

c) $\sqrt{x}-1$ (iracionální algebraické výrazy)

Řešení: **1.1.1.** a) Definičními obory jsou vesměs všechna reálná čísla, $\mathbf{D}=\mathbf{R}$.

b) Za x můžeme dosadit všechna reálná čísla s výjimkou $x=2$, neboť pro $x=2$ nabývá jmenovatel nulové hodnoty.

c) Funkce odmocniny je v oboru reálných čísel definována pouze pro nezáporná čísla, tedy $x-1\geq 0$, proto $D=\langle 1,+\infty\rangle$. ♣

Věta 1.1.1. (Rovnost algebraických výrazů) *Říkáme, že výrazy V_1 a V_2 se rovnají právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

1. *Do obou výrazů lze dosadit za proměnné kterýkoliv z prvků společného definičního oboru.*
2. *Oba výrazy nabývají stejných hodnot po dosazení týchž hodnot proměnných ze společného definičního oboru.*

Definice 1.1.1. Úpravou algebraického výrazu rozumíme nahrazení daného výrazu jiným výrazem, který se mu rovná ve společném **D**.

Než přistoupíme k ukázce úprav algebraických výrazů, považujeme za vhodné připomenout pravidla pro zacházení s mocninami a odmocninami.

Definice 1.1.2. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, *n-tou mocninou čísla a* rozumíme číslo $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-\text{krát}}$, číslo a se nazývá *základ mocniny*, n *mocnitel*.

V průběhu úprav budeme využívat následující pravidla, kde $a \in \mathbb{R}$ a $m, n \in \mathbb{N}$:

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $0^m = 0$

Pokud bychom dále definovali $a^0 = 1$ pro $a \neq 0$ a $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$, můžeme výše uvedená pravidla používat i pro $m, n \in Z$ (celá čísla).

Při zavedení odmocňování jako inverzní operace k umocňování vycházíme z následující věty:

Věta 1.1.2. *Ke každému nezápornému číslu a existuje pro každé přirozené číslo n právě jedno nezáporné číslo b takové, že $b^n = a$.*
Na základě této věty pak definujeme:

Definice 1.1.3. Nechť n je libovolné přirozené číslo, a nezáporné číslo, pak takové nezáporné číslo b, pro které platí $b^n = a$, nazveme *n-tá odmocnina čísla a*. Zapisujeme symbolicky $b = \sqrt[n]{a}$. Číslo a nazveme *základ odmocniny* a číslo n *odmocnitel*.
Obdobně pak využíváme následujících pravidel.

Pro $a, b \in \langle 0, \infty)$ a $m, n \in \mathbf{Q}$ (racionální čísla) platí:

- $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b > 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k},\ k \in N$

Při úpravách výrazů se také často využívají následující vztahy, platné pro libovolná $a, b \in \mathbb{C}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

- $(a \pm b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ab^{n-1} +$ $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k}b^k$ (binomická věta)
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$ ♣

Poznámka 1.1.1. V předchozích pravidlech jsme užívali tzv. kombinační čísla $\binom{a}{b}$. Pro úplnost si zopakujme, co tímto číslem rozumíme. Nejprve si definujme $0! = 1$ [čti: nula faktoriál], pak

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

kde

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Příklad 1.1.2. Určeme, kdy má daný výraz smysl a zjednodušte jej.

$$\frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)}{\left(\frac{a^4}{b^2} - \frac{b^4}{a^2}\right) : (a^2 - b^2)}$$

Řešení: **1.1.2.** Nejprve upravíme výrazy v závorkách (převedeme na společné jmenovatele)

$$\frac{\left(\frac{a^2+b^2-ab}{ab}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\right)}{\left(\frac{a^4a^2-b^4b^2}{a^2b^2}\right) : (a^2 - b^2)}$$

Upravíme čitatele složeného výrazu. Ve jmenovateli použijeme pravidlo pro násobení mocnin se stejným základem a dělení nahradíme násobením převrácenou hodnotou.

$$\frac{\frac{\left(a^2+b^2-ab\right)\cdot\left(a^2+b^2+ab\right)}{a^2b^2}}{\left(\frac{a^6-b^6}{a^2b^2}\right) \cdot \frac{1}{(a^2-b^2)}}$$

Čitatel jmenovatele rozložíme pomocí vzorce pro rozdíl sudých mocnin a složený zlomek převedeme na součin zlomků jednoduchých.

$$\frac{\left(a^2+b^2-ab\right)\cdot\left(a^2+b^2+ab\right)}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2b^2 \cdot \left(a^2-b^2\right)}{(a^3-b^3)\cdot(a^3+b^3)}$$

Čitatele resp. jmenovatele druhého zlomku rozložíme pomocí vzorců pro rozdíl druhých resp. rozdíl a součet třetích mocnin. Zkrátíme.

$$\frac{\left(a^2+b^2-ab\right)\cdot\left(a^2+b^2+ab\right)}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2b^2 \cdot (a-b)\,(a+b)}{(a-b)\,(a^2+ab+b^2)\cdot(a+b)\,(a^2-ab+b^2)} = 1$$

Výše uvedené postupy mají smysl pouze za podmínek, kdy $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq \pm b$. ♣

Příklad 1.1.3. Zjednodušte a určete definiční obor výrazu

$$\frac{\sqrt[12]{a^5}\,\sqrt[6]{b^5}\,\sqrt{b^{-1}}}{(\sqrt[4]{a})^3\,\sqrt[3]{b}\,\sqrt[3]{a^2}}$$

.

Řešení: **1.1.3.**

$\frac{a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}$ |převedeme na racionální mocnitele

$a^{\frac{5}{12}-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ |podle pravidel o dělení a násobení mocnin o stejném základu upravíme na celistvý výraz

$a^{\frac{5-9-8}{12}}b^{\frac{5-3-2}{6}}$ |mocnitele převedeme na společného jmenovatele

a^{-1}

Definičními obory jsou pro a i b intervaly $(0, \infty)$. ♣

Příklad 1.1.4. Pomocí binomické věty rozložte výraz $(x+y)^7$

***Řešení:* 1.1.4.** $(x+y)^7 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} x^7 + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} x^{7-1}y + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} x^{7-2}y^2 + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} a^{7-3}b^3 + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} a^{7-4}b^4 + \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} a^{7-5}b^5 + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} a^{7-6}b^6 + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} b^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Uvedený příklad již předesílá následující problematiku racionálních celistvých výrazů. Pokud bychom totiž nahradili proměnnou y konkrétním číslem, dostáváme polynom. V následující kapitole si objasníme základní terminologii polynomů a ukážeme též hledání jejich kořenů. Pro jednoduchost se omezíme pouze na polynomy s kořeny z oboru racionálních čísel.

1.2 Polynomy

🕮 Polynomy

Definice 1.2.1. Nechť je n dané přirozené číslo nebo nula, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou daná reálná čísla, x proměnná, pak výraz

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$

se nazývá *polynom n-tého stupně proměnné x s koeficienty* $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Sčítance $a_k x^k$ se nazývají *členy polynomu* a n *stupněm polynomu* . Číslo a_n se nazývá *vedoucím členem polynomu* a a_0 *absolutním členem polynomu*.

Pojem polynomu lze zobecnit i pro více proměnných (viz předchozí příklad). To ovšem překračuje rozsah našeho učiva, proto v dalším budeme vždy uvažovat (pokud nebude uvedeno jinak)reálný polynom jedné reálné proměnné x.
Nyní si uveďme několik důležitých definic a vět.

Věta 1.2.1. *O rovnosti polynomů Dva polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného stupně a koeficienty odpovídajících si členů jsou si rovny. Uvedená věta bude velmi důležitá pro pochopení dalšího učiva!*

Definice 1.2.2. *Kořenem polynomu* $P(x)$ nazveme takové číslo a, pro něž platí: $P(a) = 0$.

Definice 1.2.3. Číslo $x = c$ je *k-násobným nulovým bodem polynomu $P(x)$ pro $k \geq 1$* právě tehdy, když platí polynom $(x-c)^k \mid P(x)$, ale žádná vyšší mocnina než $(x-c)^k$ už nedělí polynom $P(x)$.

Poznámka 1.2.1. Nejde tedy o nic jiného, než o číslo, které po dosazení za proměnnou x polynom nuluje. Hledání takového čísla (kořene polynomu) ovšem nemusí být jednoduché. V následující stati se budeme zabývat právě hledáním kořenů polynomů. Pro jednoduchost budeme hledat pouze celočíselné, případně racionální kořeny.

Věta 1.2.2. *(Věta o rozkladu reálného polynomu v reálném oboru)*
Nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 1$. Nechť $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r$ jsou všechny jeho reálné kořeny, každý s násobností k_i, kde $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$, pak rozkladem reálného polynomu v oboru reálných čísel *rozumíme vztah:*

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_r)^{k_r} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_s},$$

kde $\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1}, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$ jsou v oboru reálných čísel nerozložitelné kvadratické trojčleny, které odpovídají komplexním kořenům. Platí: $k_1 + \ldots + k_1 + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n$.

Poznámka 1.2.2. V předchozí větě je ukryta ještě jedna důležitá informace. Polynom stupně n má právě n kořenů, kde počet komplexních kořenů je dán sudým číslem. Jinými slovy, polynom stupně 7, může mít 0, 2, 4 nebo 6 komplexních kořenů a má minimálně jeden kořen reálný

Příklad 1.2.1. Najděte kořeny polynomu druhého stupně $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

***Řešení:* 1.2.1.** Z definice víme, že kořenem polynomu je číslo, které nám polynom nuluje. Tedy $P(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$. (Řešíme tak vlastně algebraickou rovnici 2. stupně - kvadratickou rovnici). Na střední škole se nejčastěji uvádějí následující dva postupy:

Výpočet pomocí diskriminatu Obecně je kvadratická rovnice dána předpisem $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$. Kořeny pak hledáme podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Odkud se tento vzorec vzal?

$$ax^2 + bx + c = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

pokusíme se nyní doplnit výraz uprostřed "na čtverec", neboli získat vztah $(x + \text{něco})^2 = \text{číslo}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Neboli

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Odtud

$$(x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Odečtením člene $\frac{b}{2a}$ a jednoduchou úpravou, dostaneme hledaný vztah:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

V našem případě

$$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

Výpočet pomocí Viètových vztahů Pro výpočet kořenů pomocí Viètových vztahů, nejprve kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ *normujeme* (dělíme nenulovým koeficientem a)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Při označení $\frac{b}{a} = p$ a $\frac{c}{a} = q$, přejdeme k rovnici která je již vhodná pro použití Viètových vztahů:

1. $a_1 + a_2 = -p$
2. $a_1 \cdot a_2 = q$

Dle našeho zadání musí platit, že $a_1 + a_2 = 5$ a zároveň $a_1 \cdot a_2 = 6$. Odtud $a_1 = 2, a_2 = 3$

Při hledání kořenů polynomů stupně vyššího než 2, obecné vzorce již neexistují (případně jsou nad rámec skripta). Pokud se ovšem omezíme na hledání racionálních kořenů, můžeme využít následujících vět.

Věta 1.2.3. *Nechť číslo $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbb{Z}$ a $s \in \mathbb{N}$ je kořenem polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z},\ a_0 \neq 0$, pak platí m platí:*

$$r | a_0 \quad \wedge \quad s | a_n.$$

Poznámka 1.2.3. Čteme r dělí a_0 a s dělí a_n.

Věta 1.2.4. *Nechť číslo $\frac{r}{s}$, kde $r \in \mathbb{Z}$ a $s \in \mathbb{N}$ je kořenem polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z},\ a_0 \neq 0$, potom pro libovolné celé číslo m platí:*

$$(r - ms)|P(m).$$

Speciálně: $(r-s)|P(1)$ *a* $(r+s)|P(-1)$.

Věty 1.2.3 a 1.2.4 nám poskytují možnost nalézt racionální a celočíselné kořeny polynomu, neříkají však, že všechny nalezené hodnoty opravdu kořeny jsou. Jde tedy v podstatě o nutné podmínky. Ověření, zda nalezená čísla jsou opravdu kořeny polynomu nám poskytne až Hornerovo schéma, se kterým se seznámíme později.

Příklad 1.2.2. Nalezněte všechny racionální a celočíselné hodnoty, které mohou být kořeny polynomu $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$.

***Řešení:* 1.2.2.** Dle věty 1.2.3 vytipujeme čísla r a s:

$$r| - 3 \Rightarrow r = 1, -1, 3, -3;$$

$$s|4 \Rightarrow s = 1, 2, 4.$$

Nyní můžeme přistoupit k výpisu možných hodnot $\dfrac{r}{s}$.

$$\frac{r}{s}: \qquad 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, 3, -3, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-3}{4}.$$

Nyní pomocí věty 1.2.4 z nalezených hodnot můžeme vyloučit ty, které nemohou být kořeny daného polynomu.

$\frac{r}{s}:$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	
$r+s:$	2	0	3	1	5	3	4	-2	5	-1	7	1	$P(-1) = -4$
$r-s:$	0	-2	-1	-3	-3	-5	2	-4	1	-5	-1	-7	$P(1) = -18$

Z tabulky je zřejmé, že není nutné vyšetřovat všechny hodnoty, ale pouze $\dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{1}$. ♣

Věta 1.2.5. (Bézoutova věta) *Nechť polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, kde $n \geq 1$. Pak číslo α je kořenem polynomu $P(x)$ právě tehdy, když*

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x), \tag{1.1}$$

kde $Q(x)$ je polynom stupně $n-1$. $x - \alpha$ nazveme kořenový činitel.

Poznámka 1.2.4. Pomůcka k výpočtům (viz **??**): *Hornerovo schéma.* Hodnotu r dané polynomické funkce n-tého stupně $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ v daném bodě x_0 lze výhodně vypočítat následovně (vyplývá to ze vhodného uzávorkování polynomického výrazu $a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_0$): do tabulky zapisujeme do prvního řádku koeficienty polynomu $P(x)$ (nezapomínejme však na možné nulové koeficienty, ty zde musíme také zapsat!!!), odděleně dané číslo x_0 a provádíme postup vytváření čísel b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, ... , b_1, b_0 ve třetím řádku tabulky postupně takto:

$$b_{n-1} = a_n, \ \ b_{i-1} = a_i + b_i x_0, \ \ i = 1, \ldots, n$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
x_0		$b_{n-1}x_0$	$b_{n-2}x_0$	...	$b_1 x_0$	$b_0 x_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_0	r

(čísla ve třetím řádku tabulky jsou součty odpovídajících čísel stojících nad nimi v 1. a 2. řádku tabulky).

Postup lze verifikovat následovně: nechť $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ je daný polynom a x_0 je reálné číslo. Hledejme polynom $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0$ stupně o 1 menší, než je stupeň polynomu $P(x)$ tak, aby platilo

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0) + r.$$

Hledáme koeficienty polynomu $Q(x)$, proto napišme:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0) \cdot (x - x_0) + r.$$

Tuto rovnost dvou polynomů na levé a pravé straně (jsou stejných stupňů) lze splnit právě tak, že koeficienty polynomů u stejných stupňů se budou rovnat (viz věta 1.2.1), proto pravou stranu roznásobíme a vyhledáme koeficienty u jednotlivých mocnin. Porovnání vede na $n + 1$ podmínek:

$$\begin{array}{llll}
x^n: & a_n = b_{n-1} & \Longrightarrow & b_{n-1} = a_n \\
x^{n-1}: & a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1} & \Longrightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1} \\
x^{n-2}: & a_{n-2} = b_{n-3} - x_0 b_{n-2} & \Longrightarrow & b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 b_{n-2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
x^i: & a_i = b_{i-1} - x_0 b_i & \Longrightarrow & b_{i-1} = a_i + x_0 b_i \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
x^1: & a_1 = b_0 - x_0 b_1 & \Longrightarrow & b_0 = a_1 + x_0 b_1 \\
x^0: & a_0 = -x_0 b_0 & \Longrightarrow & r = a_0 + x_0 b_0
\end{array}$$

Uvedený postup – algoritmus vytváření koeficientů b_{i-1} $i = 1, \dots, n$, vyjádřený tabulkou, se nazývá *Hornerovo schéma*.

Z postupu plyne: hledaná hodnota polynomu $P(x_0) = r$ v bodě x_0 je na posledním místě ve třetím řádku tabulky. Jestliže výpočet končí hodnotou $r = 0$, pak to znamená, že $P(x_0) = 0$ a číslo x_0 je tak nulovým bodem – kořenem polynomu. Hornerovým schematem tedy můžeme:

(1) vypočítat hodnotu daného polynomu v daném bodě x_0,

(2) navíc, pokud je tento bod x_0 kořen daného polynomu, pak provést dělení daného polynomu lineárním polynomem $x - x_0$ ve smyslu najít koeficienty součinového polynomu

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$$

stupně $(n-1)$, který v tomto případě dělí polynom $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ beze zbytku, čili dostáváme rozklad polynomu $P(x)$ na součin pomocí kořenového činitele $(x - x_0)$:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = (x - x_0) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

Koeficienty součinového polynomu $Q(x)$ (viz věta 1.2.5) jsou napsány ve třetím řádku tabulky.

Tato druhá možnost použití Hornerova schematu zakládá další postup, a to zabývat se – jako opakovanou základní úlohou – hodnotami právě získaného polynomu $Q(x)$ v nějakých bodech.

Použití Hornerova schematu

Příklad 1.2.3. Vypočítejme hodnoty $P(1)$, $P(-1)$ polynomu $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4x + 7$ použitím Hornerova schematu.

***Řešení:* 1.2.3.** Napišme Hornerovo schema pro $x_0 = 1$:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 6 & -4 & 7 \\
1 & & 2 & 8 & 4 \\
\hline
 & 2 & 8 & 4 & \boxed{11}
\end{array}$$

Hledaná hodnota $P(1) = 11$ je zvýrazněna rámečkem v posledním řádku tabulky.

Podobně, pro $x_0 = -1$ dostaneme podle Hornerova schematu:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 6 & -4 & 7 \\
-1 & & -2 & -4 & 8 \\
\hline
 & 2 & 4 & -8 & \boxed{15}
\end{array}$$

Máme $f(-1) = 15$. ♣

Příklad 1.2.4. Rozhodněte, které z hodnot z příkladu 1.2.2 jsou kořeny daného polynomu.

***Řešení:* 1.2.4.** Pro připomenutí: jednalo se o polynom $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$ a pomocí vět 1.2.3 a 1.2.4 jsme omezili možné kořeny na hodnoty $-\frac{1}{2}, \frac{3}{1}$.

Dle Hornerova schématu:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -8 & -11 & -3 \\
-\frac{1}{2} & & -2 & 5 & 3 \\
\hline
 & 4 & -10 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

Hodnota $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ je prvním kořenem polynomu $P(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 4 & -8 & -11 & -3 \\
3 & & 12 & 12 & -3 \\
\hline
 & 4 & 4 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Hodnota $\alpha_2 = 3$ je druhým kořenem polynomu $P(x)$. ♣

Použití Hornerova schematu: další úloha

Příklad 1.2.5. Rozložme polynom $P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 26x + 9$.

***Řešení:* 1.2.5.** Jak postupovat při této úloze: podle předchozích poznatků platí, že pokud víme o nějakém čísle α, že je kořenem nebo nulovým bodem našeho polynomu, pak podle věty 1.2.5 musí existovat polynom $Q(x)$ tak, že polynom $P(x)$ lze napsat jako součin – neboli rozložit – jako

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha).$$

Protože polynom $P(x)$ je stupně 4, lze v této úvaze pokračovat pro polynom $q(x)$, takže pokud se nám podaří najít maximální počet reálných kořenů polynomu $Q(x)$, což jsou 4 kořeny, pak hledaný rozklad je možný až ve tvaru

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4),$$

kde α_1, α_2, α_3, α_4 označují kořeny, ne nutně navzájem různé. Předpokládejme, že všechny tyto kořeny jsou celočíselné nebo racionální.

Stejně jako v příkladě 1.2.2 nejprve odhadněme možné hodnoty kořenů $\alpha = \frac{r}{s}$, kde

$$r|9 \Rightarrow r = 1, -1, 3, -3, 9, -9;$$

$$s|1 \Rightarrow s = 1$$

$\frac{r}{s}$:	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{-9}{1}$	
$r+s$:	2	0	4	-2	10	-8	$P(-1) = 0$
$r-s$:	0	-2	2	-4	8	-10	$P(1) = 40$

Z uvedené tabulky plynou dvě základní informace:

1. hodnota $\frac{1}{1}$ není kořenem polynomu, neboť $P(1) = 40$

2. nalezli jsme první z kořenů $\alpha_1 = -1$ polynomu $P(x)$, protože $P(-1) = 0$

Jen pro kontrolu vyzkoušíme zda $\alpha_1 = -1$ je opravdu kořenem:

	1	-6	10	26	9
-1		-1	7	-17	-9
	1	-7	17	9	$\boxed{0}$

Můžeme dle věty 1.2.5 psát

$$P(x) = (x - (-1)) \cdot Q(x) = (x+1) \cdot (x^3 - 7x^2 + 17x + 9).$$

Koeficienty polynomu $Q(x)$ najdeme v třetím řádku Hornerova schématu. Dále zjistíme, zda $\alpha_1 = -1$ není dvojnásobným kořenem polynomu $P(x)$, resp. kořenem polynomu $Q(x)$.

Pro zjednodušení druhý řádek vypustíme a budeme psát přímo členy třetího řádku, tedy

$$b_{n-1} = a_n \quad b_{n-1}x_0 \quad b_{n-2}x_0 \quad \dots \quad b_1x_0 \quad b_0x_0$$

	1	-7	17	9
-1	1	-8	25	$\boxed{-16}$

Kořen $\alpha_1 = -1$ není násobným kořenem, protože $Q(-1) = -16$. Sami si můžete vyzkoušet zda některá ze zbývajících hodnot je kořenem polynomu $Q(x)$ potažmo $P(x)$.
Pokud jste používali Hornerovo schéma správně, měly by vám vyjít následující hodnoty polynomu $Q(-3) = -132$, $Q(3) = 24$, $Q(-9) = -1440$, $Q(9) = 324$. Závěrem lze říci, že $P(x) = (x+1) \cdot (x^3 - 7x^2 + 17x + 9)$, kde polynom $(x^3 - 7x^2 + 17x + 9)$ již nemá racionální ani celočíselné kořeny. ♣

Použití Hornerova schematu

Příklad 1.2.6. Určeme hodnotu koeficientu a polynomu $p(x) = 4x^4 - ax^2 + 5x - 2$ tak, aby číslo $x = -1$ bylo kořenem tohoto polynomu. Může být toto číslo kořen polynomu $p(x)$ násobnosti 2?

***Řešení:* 1.2.6.** Nejdříve pomocí Hornerova schematu vyjádříme podmínku $p(-1) = 0$: poslední hodnota ve třetím řádku Hornerova schematu musí být nulová. Počítejme, ale protože testujeme číslo $x = -1$ na násobnost 2, budeme hned v tabulce pokračovat dalšími řádky:

	4	0	$-a$	5	-2
-1	4	-4	$4 - a$	$1 + a$	$\boxed{p(-1) = -3 - a}$
-1	4	-8	$12 - a$	$\boxed{-11 + 2a}$	

Podmínka pro nulovou hodnotu $p(-1) = 0$ znamená $-3 - a = 0$, tudíž $a = -3$. Kořen $x = -1$ přitom nemůže být vyšší násobnosti než 1, protože jinak by také muselo být $-11 + 2a = 0$, ale tato podmínka pro naše $a = -3$ neplatí. ♣

1.3 Racionální lomené výrazy

Racionální celistvé výrazy

V úvodu kapitoly jsem si ukázali několik úprav jednoduchých racionálních lomených výrazů a spolu se znalostmi, získanými z podkapitoly polynomy můžeme logicky přejít ke složitějším racionálním lomeným výrazům. Zopakujme si základní poznatky.

Definice 1.3.1. Racionálním lomeným výrazem rozumíme $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, resp. Qx $(Qx \neq 0)$ jsou polynomy stupně n resp. m. Předpokládáme, že $P(x)$, $Q(x)$ jsou nesoudělné polynomy. Racionální lomený výraz $F(x)$ pro $n < m$ se nazývá *ryze racionální výraz*; racionální výraz $F(x)$, pro kterou je $n \geq m$, se nazývá *ne ryze racionální výraz*.

Definice 1.3.2. Definičním oborem racionálních lomených výrazů rozumíme množinu takových x, pro která dává výraz smysl a značíme jej D.

Poznámka 1.3.1. Vzhledem k definici racionálních lomených výrazů, můžeme za definiční obor brát všechna reálná čísla, vyjma těch, pro které $Qx = 0$. Stačí tedy vyloučit kořeny polynomu Qx.

1.4 Ne ryze racionální výrazy

🕮 Ne ryze racionální výrazy

Jak již bylo řečeno ne ryze racionálním výrazem rozumíme výraz, kde polynom v čitateli má vyšší stupeň než polynom jmenovatele. Příkladem může být např. výraz $P(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 5x - 2}{x - 4}$. *Vztah mezi ne ryze racionální funkcí a ryze racionální funkcí nám objasní následující věta.*

Věta 1.4.1. *Každý ne ryze racionální lomený výraz lze zapsat jako součet racionálního celistvého výrazu (polynomu) a ryze racionálního lomeného výrazu*

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Postup, kterým určíme takové polynomy $H(x)$ *a* $R(x)$ *se nazývá dělení polynomu polynomem a je znám již ze střední školy. Pro jistotu si jej připomeňme.*

1.4.1 Dělení polynomu polynomem

🕮 Dělení polynomu polynomem

Algoritmus dělení polynomu $P(x)$ *polynomem* $Q(x)$ *je obdobný algoritmu dělení přirozených čísel zapsaných v desítkové soustavě. Nejprve dělíme nejvyšší člen polynomu* $P(x)$ *nejvyšším členem polynomu* $Q(x)$*, výsledek dělení* $H_1(x)$*zapíšeme jako první člen polynomu* $H(x)$*. Součin* $H_1(x) \cdot Q(x)$ *pak odečteme od polynomu* $P(x)$*. Dostaneme zbytek* $R_1(x)$*. Pokud* $R_1(x)$ *není roven* 0 *nebo jeho stupeň není menší než stupeň polynomu* $Q(x)$*, zopakujeme uvedený postup, tj. nejvyšší člen polynomu* $R_1(x)$ *nejvyšším členem polynomu* $Q(x)$*, dostaneme druhý člen* $H_2(x)$ *polynomu* $H(x)$*. Opět odečteme součin* $H_2(x) \cdot Q(x)$ *od* $R_1(x)$*, čímž dostaneme zbytek* $R_2(x)$*. Takto můžeme postupovat dokud zbytek* $R_i(x)$ *není roven nule nebo jeho stupeň není menší než stupeň polynomu* $Q(x)$*.*

Ukažme si postup na konkrétním případě.

Příklad 1.4.1. Dělte polynom $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ polynomem $Q(x) = x - 4$.

***Řešení:* 1.4.1.** Pišme $(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4)$. Nejprve vydělíme vedoucí člen x^3 polynomu $x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ vedoucím členem x polynomu $x - 4$.

1. krok: po dělení dostáváme: $(x^3) : (x) = x^2$, což zapíšeme jako první člen polynomu $H(x)$

$(x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2$

2. krok: násobíme $x^2 \cdot (x - 4) = x^3 - 4x^2$ a jednotlivé členy tohoto součinu napíšeme podle klesajících mocnin pod odpovídající stejné mocniny v polynomu $x^3 - 5x^2 + 5x - 2)$ a změníme jim znaménka. (viz algoritmus dělení "Součin $H_1(x) \cdot Q(x)$ pak odečteme od polynomu $P(x)$.").Výsledek ($R_1(x)$) zapíšeme do nového řádku:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 \\ \underline{-x^3 + 4x^2 \qquad\qquad\qquad\quad} \\ \qquad\qquad -x^2 + 5x - 2 \end{array}$$

3. krok: Zkontrolujeme zda zbytek po dělení $-x^2 + 5x - 2$ není nulový případně jeho stupeň není menší než dělitel $x - 4$. Není! Opět dělíme vedoucí člen $-x^2 + 5x$ vedoucím členem x polynomu $x - 4$: $(-x^2 + 5x) : (x) = -x$, což zapíšeme jako další člen polynomu $H(x)$.

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x \\
\underline{-x^3 + 4x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad -x^2 + 5x - 2
\end{array}
$$

4. krok: opakujeme postup z kroku 2: násobíme $-x \cdot (x - 4) = -x^2 + 4x$ a jednotlivé členy tohoto součinu napíšeme podle klesajících mocnin pod odpovídající stejné mocniny polynomu $-x^2 + 5x - 2$ a změníme jim znaménka:

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x \\
\underline{-x^3 + 4x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad -x^2 + 5x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 - 4x \quad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 2
\end{array}
$$

5. krok: viz. krok 2 resp. 3

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 5x^2 + 5x - 2) : (x - 4) = x^2 - x + 1 \\
\underline{-x^3 + 4x^2 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad -x^2 + 5x - 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 - 4x \quad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2
\end{array}
$$

Po tomto kroku náš postup končí, protože číslo 2 je polynomem stupně menšího než polynom $Q(x)$. Jinými slovy: číslo 2 neboli konstanta je zbytkem při dělení $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ polynomem $Q(x) = x - 4$. Dle věty 1.4.1 můžeme polynom $P(x)$ zapsat:

$$
F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 5x - 2}{x - 4} = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x - 4}.\clubsuit
$$

Poznámka 1.4.1. Právě jsme si uvedli ukázku dělení polynomu polynomem, která byla v jistém ohledu speciální. Uvedený postup samozřejmě platí pro libovolné dělení polynomu. Výjimečnost úlohy tkví spíše v existenci jednoduššího řešení.
V našem případě totiž dělící polynom $Q(x) = x - 4$ je polynomem prvního stupně a proto zbytek po dělení $R(x)$ může být nejvýše stupně 0, neboli konstanta. Můžeme tak využít našich znalostí Hornerova schéma a Bézoutovy věty. Pokud by polynom $Q(x) = x - 4$ byl kořenovým činitelem, tj. 4 byla kořenem polynomu $P(x)$, musel by po dělení vyjít zbytek 0, v jiném případě nám Hornerovo schéma určí hodnotu $P(4)$. Ta bude rovna zbytku po dělení polynomu $Q(x)$ polynomem $Q(x)$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -5 & 5 & -2 \\
\hline
4 & 1 & -1 & 1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

Koeficienty polynomu $H(x) = x^2 - x + 1$ vidíme v druhém řádku a polynom $R(x) = 2$ je v rámečku.

Příklad 1.4.2. Dělte polynom $P(x) = x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 4$ polynomem $Q(x) = x^2 + 2x - 1$.

***Řešení:* 1.4.2.** Pišme:

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 4) : (x^2 + 2x - 1) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 15x - 37 \\
\underline{-x^6 - 2x^5 + x^4 \qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad x^5 - 5x^4 + 4 \\
\qquad\quad \underline{-x^5 - 4x^4 + x^3 \qquad} \\
\qquad\qquad\qquad -7x^4 + x^3 + 4 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{7x^4 + 14x^3 - 7x^2 \qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 15x^3 - 7x^2 + 4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-15x^3 - 30x^2 + 15 \quad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -37x^2 + 15x + 4
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r} \underline{37x^2 + 74x - 37} \\ 89x - 33 \end{array}$$

Výsledek zapíšeme:

$$\frac{x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 4}{x^2 + 2x - 1} = x^4 + x^3 - 7x^2 + 15x - 37 + \frac{89x - 33}{x^2 + 2x - 1}.\clubsuit$$

1.4.2 Rozklad na parciální zlomky

V dalším studiu matematiky, zejména v oblasti úprav algebraických výrazů, funkcí a integrace racionálních funkcí pro nás bude výhodné umět rozkládat racionální lomené výrazy na (jednodušší) parciální zlomky. *Výsledek takové operace spočívá v nahrazení jednoho ryze racionálního výrazu (složitého) součtem několika jednodušších přesně definovaných výrazů.*

Uveďme nejprve několik nutných termínů.

Definice 1.4.1. Zlomky tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \qquad a \qquad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^l}, \quad p^2 - 4q < 0$$

nazýváme *parciální zlomky*.

Věta 1.4.2. *(Rozklad ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky) Každou ryze racionální lomenou funkci* $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *lze rozložit na součet parciálních zlomků.*

1. *Polynom $Q(x)$ rozložíme v reálném oboru na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických trojčlenů:*

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_r)^{k_r} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_s}$$

2. *Každému faktoru $(x-\alpha_1)^{k_1}, i = 1, \ldots, r$ odpovídá skupina k_i zlomků ve tvaru*

$$\frac{A_1}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_i)^2} + \ldots + \frac{A_{k_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}$$

a každému faktoru $\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{l_j}, j = 1, \ldots, s$ odpovídá skupina l_j zlomků ve tvaru

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \ldots + \frac{M_{l_j} x + N_{l_j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}.$$

3. *Výraz $F(x)$ zapíšeme pomocí součtu odpovídajících si skupin zlomků a říkáme mu* rozklad na parciální zlomky*.*

Rozklad na parciální zlomky je tedy určen rozkladem jmenovatele $Q(x)$ racionální funkce. Metodami algebry lze navíc dokázat, že rozklad každého ryze racionálního výrazu na parciální zlomky je určen jednoznačně, a to až na pořadí členů v součtu. To znamená, že koeficienty vystupující v čitatelích parciálních zlomků jsou určeny jednoznačně. Nebudeme zde uvádět příslušný důkaz, ale zájemci jej mohou nalézt v literatuře.
Uveďme ještě jednou v tabulce, jak si odpovídají kořenové činitele jmenovatele $Q(x)$ a k nim patřící součty parciálních zlomků.

součinitel jmenovatele	*odpovídající členy v součtu parciálních zlomků*
$x - a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$
$(x^2 + px + q)$	$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)}$
$(x^2 + px + q)^l$	$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^l}$

Ukažme si postup hledání koeficientů A_k, $M_l a N_l$ na konkrétním příkladě.

Parciální zlomky

Příklad 1.4.3. Rozložte racionální lomený výraz $\dfrac{5x^2+11}{x^3+5x-6}$ na parciální zlomky.

***Řešení:* 1.4.3.** $\dfrac{5x^2+11}{x^3+5x-6}$ je ryze racionální výraz.

Hledáme kořeny jmenovatele – polynomu třetího stupně $Q(x) = x^3+5x-6$. Postup hledání kořenů je znám z předchozí části kapitoly (čtenář si může vyzkoušet sám). Nalezli jsme pouze jeden reálný kořen $\alpha_1 = 1$, tedy první faktor je lineární polynom $(x-1)$:

$$Q(x) = x^3+5x-6 = (x-1)\cdot(x^2+px+q).$$

Další kořeny (pokud existují) lze hledat jako kořeny kvadratického polynomu (x^2+px+q), proto ho musíme určit, a to dělením polynomu $Q(x) = x^3+5x-6$ lineárním polynomem $(x-1)$. O tomto dělení víme, že musí být beze zbytku (1 je kořenem polynomu): po provedení algoritmu dělení dostáváme

$$Q(x) = x^3+5x-6 = (x-1)\cdot(x^2+x+6).$$

Kvadratický polynom (x^2+x+6) ale už nemá reálné kořeny, neboli jeho kořeny tvoří dvojice komplexně sdružených čísel; pro jeho diskriminant totiž platí $D = p^2-4q = 1-24 = -23 < 0$, proto další kořeny nehledáme a rozklad naší racionální funkce na součet parciálních zlomků má tvar:

$$\frac{5x^2+11}{x^3+5x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+6}.$$

Odtud

$$5x^2+11 = A\cdot(x^2+x+6)+(Mx+N)(x-1).$$

Porovnávání koeficientů u stejných mocnin na levé, pravé straně rovnice (viz věta 1.2.1) vede na soustavu tří lineárních rovnic pro neznámé A, M, N:

u mocniny x^2: $5 = A+M$,
u mocniny x^1: $0 = A-M+N$,
u mocniny x^0: $11 = 6A-N$.

Sečtením všech rovnic dostáváme $16 = 8A$, proto hodnota $A = 2$. Dále z první a třetí rovnice plyne, že $M = 3$, $N = 1$ a rozklad je

$$\frac{5x^2+11}{x^3+5x-6} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+x+6}.$$

Poznámka 1.4.2. Rozklad na parciální zlomky není nijak náročný na myšlenkový postup, jednotlivé kroky však mohou skrývat početní problémy. Proto je vhodné si po každém kroku kontrolovat Váš výpočet. Pokud uděláte chybu na začátku, na konci ji budete těžko objevovat. Pokud si propočítáte více příkladů, možnost chyby minimalizujete. Největším problémem zůstává správně rozložit lomený výraz na obecné parciální zlomky (bod 2. z věty 1.4.2) . Uveďme proto několik takových obecných rozkladů.

a) $\dfrac{x+1}{(x-2)^2\cdot x^2\cdot(x+2)} = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{(x-2)^2} + \dfrac{A_3}{x} + \dfrac{A_4}{x^2} + \dfrac{A_5}{x+2}.$

b) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+1)^3} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{A_3}{(x-1)^3} + \dfrac{A_4}{x+1} + \dfrac{A_5}{(x+1)^2} + \dfrac{A_6}{(x+1)^3}$

c) $\dfrac{6}{x^2\cdot(x^2+9)\cdot(x+8)\cdot(x+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{M_1x+N_1}{x^2+9} + \dfrac{A_3}{x+8} + \dfrac{A_4}{x+1}.$

Příklad 1.4.4. Rozložte racionální lomený výraz $\dfrac{x^2+-2}{x^4-2x^3+2x^2}$ na parciální zlomky.

***Řešení:* 1.4.4.** Výraz $\dfrac{x^2+-2}{x^4-2x^3+2x^2}$ je ryze racionální. Pokud by nebyl, aplikovali bychom větu 1.4.1

1. Rozložíme jmenovatele v reálném oboru, tj. $Q(x) = x^4-2x^3+2x^2 = x^2\cdot(x^2-2x+2)$, kde x^2-2x+2 je v reálném oboru nerozložitelný.

2. Rozklad na parciální zlomky nabývá tvaru:

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{M_1x+N_1}{x^2-2x+2} \tag{1.2}$$

3. Vynásobíme rovnici 1.2 společným jmenovatelem:

$$x^2-2 = A_1x\left(x^2-2x+2\right) + A_2\left(x^2-2x+2\right) + \left(M_1x+N_1\right)x^2.$$

   Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin dostáváme soustavu rovnic:
   u mocniny x^3: $0 = A_1 + M_1$,
   u mocniny x^2: $1 = -2A_1 + A_2 + N_1$,
   u mocniny x^1: $0 = 2A_1 - 2A_2$
   u mocniny x^0: $-2 = 2A_2$.

   Odtud přímo plyne, že $A_1 = -1, A_2 = -1, M_1 = 1, N_1 = 0$ a rozklad má tvar

$$\frac{x^2-2}{x^4-2x^3+2x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{x}{x^2-2x+2}.$$

Jako poslední ukázku rozkladu na parciální zlomky si ukažme komplexní příklad se všemi kroky, se kterými jsme se v této kapitole seznámili.

Příklad 1.4.5. Rozložte racionální lomený výraz $\dfrac{x^6-4x^5+7x^4-16x^3+15x^2-11x+12}{x^4-4x^3+x^2-12x+9}$ na parciální zlomky.

***Řešení:* 1.4.5.** Prvním krokem je převedení ne ryze racionálního výrazu na ryze racionální. Dělme polynom čitatele polynomem jmenovatele:

$$\begin{array}{l}
(x^6-4x^5+7x^4-16x^3+15x^2-11x+12) : (x^4-4x^3+x^2-12x+9) = x^2+1 \\
\underline{-x^6+4x^5-6x^4+12x^3-9x^2} \\
\qquad x^4-4x^3+6x^2-11x+12 \\
\qquad \underline{-x^4+4x^3-6x^2+12x-9} \\
\qquad\qquad\qquad x+3
\end{array}$$

Můžeme psát:

$$\frac{x^6-4x^5+7x^4-16x^3+15x^2-11x+12}{x^4-4x^3+x^2-12x+9} = x^2+1+\frac{x+3}{x^4-4x^3+x^2-12x+9}.$$

V druhém kroku se pokusíme jmenovatele získaného ryze racionálního výrazu rozložit na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických trojčlenů. Jinými slovy pokusíme se najít maximální počet reálných kořenů. Nejprve zkoumejme případné celočíselné resp. racionální kořeny (viz věta 1.2.4).

Vytipujeme čísla r a s:

$$r|9 \Rightarrow r = 1, -1, 3, -3, 9, -9;$$

$$s|1 \Rightarrow s = 1.$$

$\frac{r}{s}:$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{-9}{1}$	
$r+s:$	2	0	4	-2	10	-8	$P(-1)=32$
$r-s:$	0	-2	2	-4	8	-10	$P(1)=0$

Z tabulky ihned plyne, že $x_1 = 1$ a hodnoty -1 resp. 9 nemohou být kořeny polynomu ($P(-1) \neq 0$, resp. -10 nedělí 32).

Použijeme Hornerovo schéma a znalosti Bézoutovy věty. Potvrdíme tak kořen $x_1 = 1$ a můžeme v dalších řádcích odzkoušet násobnost kořenů, resp. zda vybrané hodnoty $(-3, 3, -9)$jsou kořeny polynomu $Q(x)$.

	1	-4	6	-12	9
1	1	-3	3	-9	$\boxed{0}$
1	1	-2	1	$\boxed{-8}$	
-3	1	-6	21	$\boxed{-72}$	
3	1	0	3	$\boxed{0}$	

Dalším kořenem je 3. Poslední hodnotu -9 již nemusíme zkoumat, protože dle Bézoutovy věty lze ryze racionální výraz zapsat takto:

$$\frac{x+3}{x^4 - 4x^3 + x^2 - 12x + 9} = \frac{x+3}{(x-1)(x-3)(x^2+3)}.$$

Poslední závorka jmenovatele obsahuje evidentně v reálných číslech nerozložitelný výraz.

Poznámka 1.4.3. V tomto úspornějším způsobu hledání kořenů, kdy do jednoho schématu vepisujeme více zkoumaných hodnot je důležité uvědomit si který řádek používáme. Pro jistotu zopakujme:

- pokud hledáme násobnost kořene, používám bezprostředně předešlý řádek, nikoliv opakovaně řádek první
- pokud jsme již alespoň jeden kořen našli (i s jeho maximální násobností), můžeme použít jak první řádek schématu, tak kterýkoliv předešlý, který končí 0, tj. nalezením kořene.

Nyní máme výraz připraven pro konečný rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-3)(x^2+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+3}$$

$$x + 3 = A_1(x-3)(x^2+3) + A_2(x-1)(x^2+3) + (M_1 + N_1)(x-1)(x-3)$$

$$x + 3 = A_1(x^3 - 3x^2 + 3x - 9) + A_2(x^3 - x^2 + 3x - 3) + M_1(x^3 - 4x^2 + 3x) + N_1(x^2 - 4x + 3)$$

Porovnáním koeficientů u příslušných mocnin dostáváme soustavu rovnic:
u mocniny x^3: $0 = A_1 + A_2 + M_1$,
u mocniny x^2: $0 = -3A_1 - A_2 - 4M_1 + N_1$,
u mocniny x^1: $1 = 3A_1 + 3A_2 + 3M_1 - 4N_1$
u mocniny x^0: $3 = -9A_1 - 3A_2 + 3N_1$.

Soustava není tak jednoduchá jako v minulých případech, proto zde uvedeme postup řešení. Z první rovnice vyjádříme

$$A_1 = -A_2 - M_1$$

a dosadíme do všech zbývajících rovnic.
$0 = 3A_2 + 3M_1 - A_2 - 4M_1 + N_1$,
$1 = -3A_2 - 3M_1 + 3A_2 + 3M_1 - 4N_1$
$3 = 9A_2 + 9M_1 - 3A_2 + 3N_1$.

Po úpravě

$0 = 2A_2 - M_1 + N_1,$
$1 = -4N_1$
$3 = 6A_2 + 9M_1 + 3N_1.$

Druhá rovnice nám přímo říká, že $N_1 = -\frac{1}{4}$ a z první rovnice pak můžeme vyjádřit:

$$M_1 = 2A_2 - \frac{1}{4}$$

a dosadit do poslední rovnice:

$$3 = 6A_2 - \frac{9}{4} + 18A_2 - \frac{3}{4} = 26A_2 - 3 \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{4}.$$

Zpětným dosazováním dostaneme: $A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{4}, M_1 = \frac{1}{4}, N_1 = -\frac{1}{4}.$

Konečně můžeme dokončit příklad:

$$\frac{x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 11x + 12}{x^4 - 4x^3 + x^2 - 12x + 9} = x^2 + 1 - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4(x-3)} + \frac{x-1}{4(x^2+3)}. \clubsuit$$