Kapitola 2

Funkce, elementární funkce.

V této kapitole si se budeme věnovat studiu základních vlastností funkcí jako je definiční obor, obor hodnot. Připomeneme si pojmy sudá, lichá, rostoucí, klesající. Seznámíme se s operacemi s funkcemi jako jsou součet, součin, podíl, skládání funkcí, operace s grafy. S jednotlivými druhy elementárních funkcí, kvadratické a mocninné, logaritmické a exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce, se seznámíme podrobněji v dalších kapitolách.

2.1 Vlastnosti funkcí.

Motivace - definiční obor a obor hodnot funkce

Mějme předpis $y = \sqrt{x-1}$, pro $x, y \in \mathbb{R}$. Tento říká, že reálnému číslu x přiřadíme reálné číslo y tak, že vypočteme druhou odmocninu z čísla x. Ovšem musíme si uvědomit, že druhou odmocninu, jejíž výsledek je reálný můžeme spočítat pouze pro čísla $x \geq 1$. Tím se nám objevilo omezení na výběr čísel x. Zároveň nám po dosazení čísel $x \geq 1$ vychází pouze taková čísla, pro která platí $y \geq 0$. Definiční obor je v tomto případě množina "všech přípustných čísel x"a oborem hodnot jsou všechna čísla y, která vyjdou po dosazení x. V našem případě jde o funkci $f(x) = \sqrt{x-1}$ s definičním oborem $Df = (1, \infty)$ a oborem hodnot $Hf = (0, \infty)$.

Funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce, funkce sudá a lichá

Definice 2.1.1 (Funkce, definiční obor, obor hodnot)**.** *Funkcí* f budeme rozumět zobrazení, které zobrazí body z podmnožiny $U \in \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, píšeme $f : U \to \mathbb{R}$. *Definičním oborem Df* budeme rozumět množinu U a *oborem hodnot Hf* množinu $\{y \in \mathbb{R} | \, y = f(x)\}$.

Připomeňme si, co musí být splněno, aby se dvě funkce rovnaly.

Definice 2.1.2. *Rovnost dvou funkcí f, g*: funkce f, g jsou totožné, jestliže se splní každá z podmínek:

(1) $Df = Dg$,
(2) $Hf = Hg$,
(3) pro každé $x \in Df$ (tudíž také $x \in Dg$) je $f(x) = g(x)$.

Poznamenejme, že prvky množiny Df, tedy vzory, se nazývají také nezávislými proměnnými, prvky množiny Hf se nazývají závislými proměnnými. Protože pro reálnou funkci množiny Df, Hf sestávají z reálných čísel, lze dále zavést pojem grafu reálné funkce:

Definice 2.1.3. *Grafem reálné funkce f* se nazývá množina všech bodů $[x,\, y]$ v souřadnicové soustavě v rovině s vlastností $x \in Df$ a $y = f(x)$.

Grafem reálné funkce může být křivka v rovině, ale v závislosti na definičním oboru a předpisu reálné funkce může graf sestávat také z izolovaných bodů. Graf funkce má vizuální hodnotu; graf funkce poskytuje informace obecně o vlastnostech dané funkce.

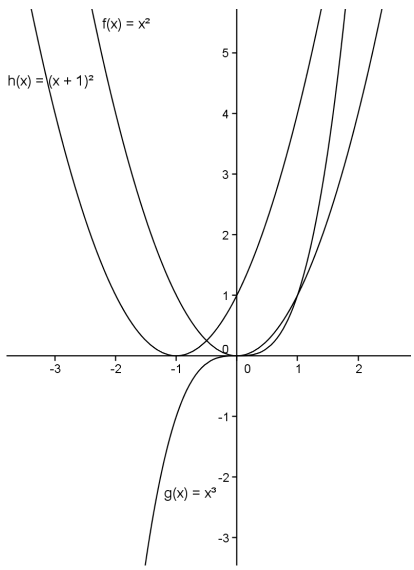
Definice 2.1.4 (Funkce sudá a lichá)**.** Funkci f nazveme *sudou*, jestliže pro každé $x \in Df$ je také $-x \in Df$ a zároveň $f(x) = f(-x)$. Funkci f nazveme *lichou*, jestliže pro každé $x \in Df$ je také $-x \in Df$ a zároveň $f(x) = -f(x)$.

Příklady sudá a lichá funkce.

1. Zjistěte zda se jedná o funkci sudou (resp. lichou) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Protože platí $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$, tedy $f(x) = f(-x)$, je to funkce sudá.

2. Zjistěte zda se jedná o funkci sudou (resp. lichou) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Protože platí $(-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$, tedy $g(x) = -g(x)$, je to funkce lichá.

3. Zjistěte zda se jedná o funkci sudou (resp. lichou) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x+1)^2$. Protože platí $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ a $(-x+1)^2 = x^2-2x+1$, tedy $h(x) \neq -h(x)$ a zároveň $h(x) \neq h(-x)$, tedy funkce není ani lichá ani sudá.



Obrázek 2.1: Části grafů funkcí $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = (x+1)^2$.

Všimněte si, že funkce $f(x) = x^2$ je sudá a je souměrná podle osy x, lichá funkce $g(x) = x^3$ je souměrná podle počátku. Funkce $h(x) = (x+1)^2$, která není ani sudá ani lichá, není souměrná ani podle počátku ani podle osy x.

Rostoucí a klesající funkce

Definice 2.1.5. Funkce f se nazývá

(1) *rostoucí*, jestliže pro každé x_1, x_2 takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.

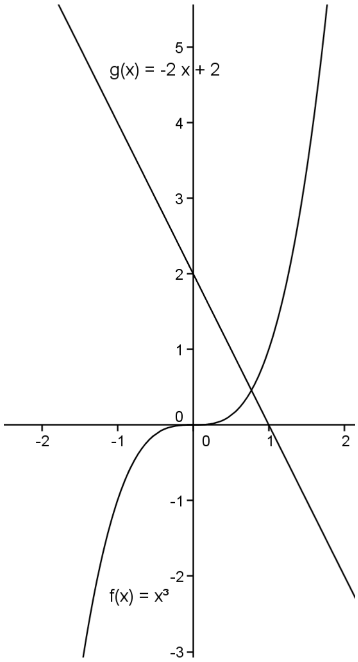
(2) *klesající*, jestliže pro každé x_1, x_2 takové, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$.

(3) *neklesající*, jestliže pro každé x_1, x_2 takové, že $x_1 \leq x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(4) *nerostoucí*, jestliže pro každé x_1, x_2 takové, že $x_1 \leq x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Pokud daná funkce f má na množině $\mathbf{M}$ některou z daných vlastností, označujeme ji jako funkci *monotonní na této množině* $\mathbf{M}$.

Na následujícím obrázku jsou příklady funkce klesající a funkce rostoucí.



Obrázek 2.2: Části grafů funkce rostoucí $f(x) = x^3$ funkce klesající $g(x) = -2x$.

Definice 2.1.6. Předpokládejme, že pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro množinu $\mathbf{M}$ platí $\mathbf{M} \subset Df$. Funkce f se nazývá

(1) *shora omezená na množině* $\mathbf{M}$, jestliže existuje takové reálné číslo K, že pro každé reálné číslo $x \in \mathbf{M}$ platí $f(x) \leq K$ (číslo K se nazývá *horním omezením* funkce f na dané množině);

(2) *zdola omezená na množině* $\mathbf{M}$, jestliže existuje takové reálné číslo L, že pro každé reálné číslo $x \in \mathbf{M}$ platí $f(x) \geq L$ (číslo L se nazývá *dolním omezením* funkce f na dané množině);

(3) *omezená na množině* $\mathbf{M}$, jestliže je na této množině omezená shora a současně zdola.

2.2 Prosté a složené zobrazení.

🕮 Prosté zobrazení.

Definice 2.2.1. Zobrazení $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se nazývá *prosté zobrazení* množiny A do množiny B právě tehdy, když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ takové, že $x_1 \neq x_2$, se splní $f(x_1) \neq f(x_2)$ (slovy: prosté zobrazení zobrazí každé dva různé vzory na různé obrazy).

Ověření, zda je zobrazení prosté.

Příklad 2.2.1. Nechť $f : y = \frac{1}{2+x}$ je zobrazení definované na množině $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$ (maximálním definičním oboru tohoto zobrazení). Zjistěme, zda toto zobrazení je prosté na Df.

Řešení: **2.2.1.** Nechť x_1, $x_2 \in \mathbf{A}$ jsou libovolné dva prvky náležící definičnímu oboru Df takové, že $x_1 \neq x_2$. Máme dokázat, že pro tyto prvky (čísla) platí

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Postupujme sporem: předpokládejme, že pro prvky $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ s vlastností $x_1 \neq x_2$ se současně splní

$$f(x_1) = f(x_2)$$

neboli

$$\frac{1}{2+x_1} = \frac{1}{2+x_2}.$$

Z rovnosti těchto dvou zlomků se stejným čitatelem plyne $2 + x_1 = 2 + x_2$, odtud vyplývá $x_1 = x_2$, to je ve sporu s předpokladem. Proto dané zobrazení je prosté na Df.

🕮 Složené zobrazení.

Definice 2.2.2. *Složené zobrazení:* Nechť $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $g : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ jsou dvě zobrazení, nechť pro množiny $H(f), C$ platí: $H(f) \cap C$ je neprázdná množina. Definujme pak pomocí zobrazení $f,\ g$ další zobrazení h na množině $D(h) = \{x : x \in A \ \text{ a současně } \ f(x) \in C\}$ předpisem

$$h : x \to g(f(x)).$$

Pak zobrazení h se nazývá složeným zobrazením ze zobrazení f, g. Zapisujeme ho $h = g \circ f$ nebo $h = g(f)$. Zobrazení f se nazývá *vnitřním zobrazením* při tvoření zobrazení $h = g \circ f$, zobrazení g je *vnějším zobrazením*.

Jestliže tedy obrazem prvku $x \in Df$ v zobrazení f je prvek y takový, že přitom prvek $y = f(x)$ náleží do Dg, lze ho dál zobrazit v zobrazení g: označme proto jeho obraz $z = g(y)$. Bylo však $y = f(x)$, po této náhradě máme

$$z = g(y) = g(f(x))$$

Z definice složeného zobrazení plyne, že záleží na pořadí skládání zobrazení f, g. Jestliže zaměníme vnější za vnitřní, jejich záměna povede obecně k jinému složenému zobrazení, ovšem ne vždy bude toto zobrazení existovat.

Věta 2.2.1. *Nechť $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B},\ g : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ jsou prostá zobrazení. Pak složené zobrazení $g \circ f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ je rovněž prostým zobrazením.*

2.3 Inverzní zobrazení

🕮 Definice

Definice 2.3.1. *Inverzní zobrazení:* Nechť $f : \mathbf{A} \to B$ je prosté zobrazení, nechť pro každé $x \in A$ platí $f(x) = y$, $y \in \mathbf{B}$. Inverzním zobrazením f^{-1} k zobrazení f nazýváme zobrazení

$$f^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$$

takové, že pro každé $y \in \mathbf{B}$ platí: $f^{-1}(y) = x$ právě když $f(x) = y$.

Poznámka 2.3.1. Označení inverzního zobrazení jako f^{-1} je konvencí a neznamená žádné „dělení"ani „převrácenou hodnotu"pro f.

Určení inverzního zobrazení

Příklad 2.3.1. Mějme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ určené předpisem $f : y = 7x + 2$. Určeme inverzní zobrazení k tomuto zobrazení.

***Řešení:* 2.3.1.** Zobrazení f je prostým zobrazením množiny všech reálných čísel $\mathbb{R}$ na celou množinu $\mathbb{R}$. Proto inverzní zobrazení existuje a bude opět zobrazovat $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Najdeme ho tak, že ze vztahu

$$y = 7x + 2$$

vypočítáme $x = \frac{y-2}{7}$, přeznačíme x na y a obráceně a nakonec zapíšeme

$$f^{-1} : y = \frac{x-2}{7}.$$

Z definice inverzního zobrazení plyne následující tvrzení, ve kterém jsou vyjádřeny vlastnosti inverzního zobrazení (uvedeme ho bez důkazu):

Věta 2.3.1. *Nechť $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ je prosté zobrazení množiny $\mathbf{A}$ na množinu $\mathbf{B}$. Pak platí:*

(1) existuje právě jedno zobrazení $f^{-1} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ inverzní k zobrazení f a platí $Df = Hf^{-1}$, $Df^{-1} = Hf$;

(2) inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ je prostým zobrazením;

(3) pro složená zobrazení $f^{-1} \circ f$, $\quad f \circ f^{-1}$ platí:

$f^{-1} \circ f = id$ neboli identické zobrazení množiny $\mathbf{A}$ na množinu $\mathbf{A}$, tj. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pro libovolné $x \in \mathbf{A}$,

$f \circ f^{-1} = id$ neboli identické zobrazení množiny $\mathbf{B}$ na množinu $\mathbf{B}$, tj. $(f \circ f^{-1})(x) = x$ pro libovolné $x \in \mathbf{B}$.

Poznámka 2.3.2. *Vztah grafu funkce f a grafu funkce f^{-1} inverzní k této funkci.* Předpokládejme, že jsme zakreslili graf nějaké funkce f, tj. sestrojili jsme množinu bodů $[x, y]$ v rovině, pro které platí $x \in Df$ a $y = f(x)$. Kvůli jednoduchosti předpokládejme, že grafem této funkce je oblouk nějaké křivky v rovině. Předpokládejme, že funkce f^{-1} je inverzní funkcí k dané funkci f. Lze nyní konstatovat následující vztahy:

- pro $x \in Df$ bod $[x, y]$ náleží grafu funkce f právě když $y = f(x)$;

- pro $y \in Df^{-1}$ bod $[y, x]$ náleží grafu funkce f^{-1} právě když $x = f^{-1}(y)$.

Z definice inverzní funkce přitom platí: $y = f(x)$ právě když $x = f^{-1}(y)$. Jinými slovy: bod $[y, x]$ náleží grafu funkce f^{-1} právě když bod $[x, y]$ náleží grafu funkce f.

Získali jsme velice významnou vlastnost grafů funkce a k ní inverzní funkce, která říká:

Graf inverzní funkce f^{-1} dostaneme z grafu dané funkce překlopením grafu f přes přímku o rovnici $y = x$, nebo ještě jinak: *grafy dvojice funkcí f, f^{-1} jsou osově souměrné, a to podle přímky o rovnici $y = x$, osy 1. a 3. kvadrantu roviny.*

2.4 Jak vznikají nové funkce z daných funkcí.

Existují postupy, jak vytvořit novou funkci ze zadaných funkcí. Uvedeme si, jak pracovat s reálnými funkcemi za pomocí aritmetických operací

.

Aritmetické operace s reálnými funkcemi.

Předpokládejme, že máme dvě reálné funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definujeme:

Definice 2.4.1. *Součet dvou funkcí $f + g$* je reálná funkce s vlastností: $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$ pro každé $x \in Df \cap Dg$ (neboli pro hodnotu $(f + g)(x)$ je $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, pokud $x \in Df \cap Dg$.)

Definice 2.4.2. *Rozdíl dvou funkcí $f - g$* je reálná funkce s vlastností: $f - g : x \rightarrow f(x) - g(x)$ pro každé $x \in Df \cap Dg$ (neboli pro hodnotu $(f - g)(x)$ je $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, pokud $x \in Df \cap Dg$.)

Definice 2.4.3. *Součin dvou funkcí $f \cdot g$* je reálná funkce s vlastností: $f \cdot g : x \rightarrow f(x) \cdot g(x)$ pro každé $x \in Df \cap Dg$ (neboli pro hodnotu $(f \cdot g)(x)$ je $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, pokud $x \in Df \cap Dg$.)

Definice 2.4.4. *Podíl dvou funkcí $\frac{f}{g}$* je reálná funkce s vlastností: $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ pro každé $x \in Df \cap Dg$, $g(x) \neq 0$ (neboli pro hodnotu $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ je $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pokud $x \in Df \cap Dg$ a navíc $g(x) \neq 0$.)

Poznámka 2.4.1. Vzory a obrazy v reálných funkcích jsou reálná čísla, proto všechny uvedené operace jsou zavedeny korektně: aritmetické operace s reálnými funkcemi se tvoří "po bodech, po jednotlivých hodnotách", a to pomocí aritmetických operací s reálnými čísly. Tyto definice mají vliv na konstrukci grafů odpovídajících funkcí – můžeme je opět sestrojit "po bodech"(i když takový postup v obecném případě stěží poskytne úplnou informaci o grafu).

Definice 2.4.5. *Absolutní hodnota* $|f|$ pro danou funkci f je reálná funkce s vlastností: $|f| : x \to |f(x)|$ pro každé $x \in Df$ (neboli pro hodnotu $(|f|)(x)$ je $(|f|)(x) = |f(x)|$ pro $x \in Df$.)

Definice 2.4.6. *Mocnina* f^g je reálná funkce s vlastností: $f^g : x \to f(x)^{g(x)}$ pro každé $x \in Dg$ s vlastností $f(x) > 0$ (neboli pro hodnotu $(f^g)(x)$ je $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$, pokud $x \in Dg$ a $f(x) > 0$ pro takové x.)

Poznámka 2.4.2. Aritmetické operace s reálnými funkcemi mají důsledky např. pro definiční obory a obory hodnot nových funkcí a také na jejich další vlastnosti. Budeme je zkoumat v dalším výkladu, proto na tomto místě neuvádíme ani speciální příklady ani úlohy.

2.5 Operace s grafy

Je dobré uvědomit si, jaký účinek na grafy funkcí mají operace s proměnnými – nezávislou proměnnou x nebo závislou proměnnou y. Jestliže

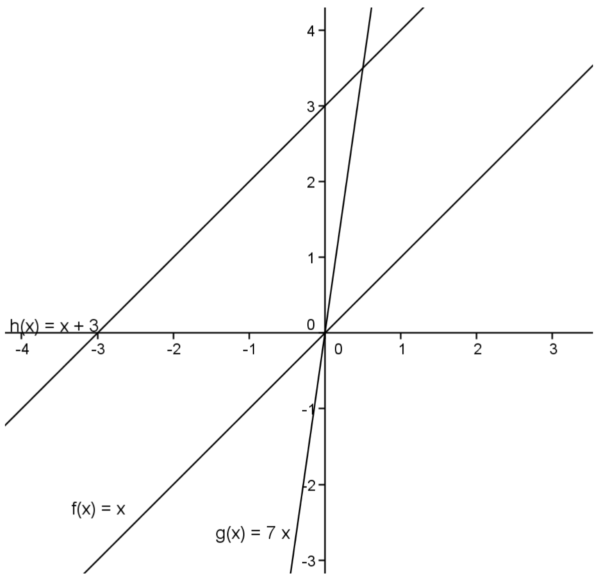
(1) it Horizontální posunutí. Pro reálné číslo a změníme $x \to (x - a)$, to značí posuneme argument - nezávisle proměnnou x o a jednotek na ose o_x doprava pro $a > 0$, resp. doleva pro $a < 0$ (jde vlastně o posunutí začátku 0 na ose do čísla a)

(2) it Vertikální posunutí. Pro reálné číslo a zvětšíme každou hodnotu y určenou jako $y = f(x)$ o hodnotu a, tj. utvoříme závisle proměnnou y novým předpisem $y = f(x) + a$, pak grafem této funkce je stejná funkce, kterou dostaneme rovnoběžným vertikálním posunutím celého grafu funkce $y = f(x)$ o a jednotek na ose o_y nahoru pro $a > 0$, resp. dolů pro $a < 0$.

(3) it Změna „měřítka". pro kladné reálné číslo a zvětšíme každou hodnotu y určenou jako $y = f(x)$ a-krát, tj. utvoříme závisle proměnnou y novým předpisem $y = af(x)$, pak grafem této funkce je obdobná funkce a dostaneme ji "zrychlením"celého grafu funkce $y = f(x)$ mírou a-krát, pokud $a > 1$, nebo „zpomalením"mírou a-krát, pokud $a < 1$.

(4) it „Překlopení"grafu. U nezávislé proměnné x změníme znaménko, tj. změníme $x \to (-x)$, neboli změníme orientaci, uspořádání na ose o_x; pak graf funkce $f(-x)$ vznikne překlopením původního grafu $f(x)$ z pravé poloroviny do levé a naopak.

Je dobré si uvědomit, že operace (1), (2), (3), (4) souvisí s vytvářením speciálních složených funkcí a že je lze použít také na konstrukci odvozených grafů jiných reálných funkcí.



Obrázek 2.3: Operace s grafy pro lineární funkce.