Kapitola 3

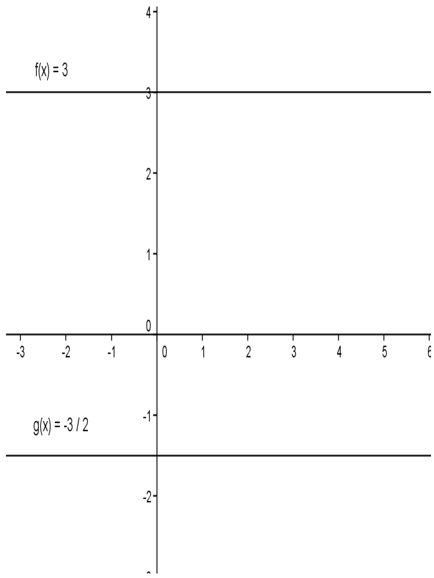
Kvadratické a mocninné funkce.

V této kapitole se budeme zabývat mocninnými funkcemi a jejími speciálními případy - konstatní a kvadratická funkce. Mocnninné funkce jsou dány předpisem $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Koeficientu α říkáme mocnina, mocnitel nebo také exponent. V obecném případě definičním oborem i oborem hodnot bývá $\mathbb{R}$. Pro $\alpha = 0$ jsou to konstantní funkce, $\alpha = 1$ lineární funkce a $\alpha = 2$ kvadratická funkce. U mocninných funkcí se zaměříme na situace, kdy je mocnina celočíselná kladná, kladná racionální, záporná a iracionální.

Konstantní funkce.

Definice 3.0.1. *Konstantní funkcí* budeme rozumět funkci $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Pro konstantní funkci platí, že vše se zobrazí na jediné reálné číslo $k \in \mathbb{R}$. Definiční obor konstantní funkce jsou reálná čísla a obor hodnot je k. Grafem konstantní funkce je přímka, která je rovnoběžná s osou x. Každou z konstantních funkcí můžeme chápat tak, že vznikla posunem grafu základní funkce $g(x) = x^0 = 1$.



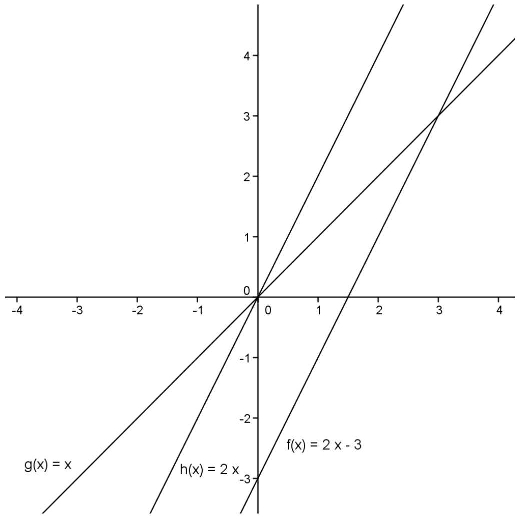
Obrázek 3.1: Části grafů konstantních funkcí $f(x) = 3$ a $g(x) = -\frac{3}{2}$.

Lineární funkce.

Definice 3.0.2. *Lineární funkcí* budeme rozumět funkci $f(x) = px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$ a $p \neq 0$.

Definiční obor i obor hodnot lineární funkce jsou reálná čísla. Pro lineární funkci platí, že vše se zobrazí na přímku. Tedy grafem lineární funkce je přímka.

Lineární funkci $f(x) = px + q$ můžeme chápat jako funkci, která vznikla posunem grafu funkce $g(x) = x$ o q a změnou jejího ,,měřítka"pkrát.



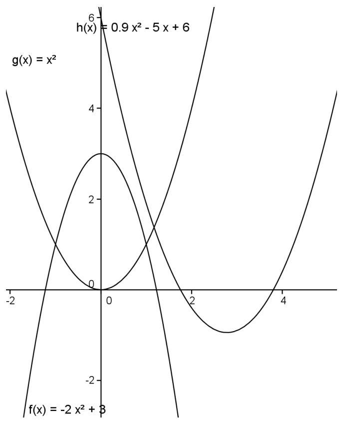
Obrázek 3.2: Posun grafu lineární funkce $g(x) = x$.

🕮 Kvadratická funkce.

Definice 3.0.3. *Kvadratickou funkcí* budeme rozumět funkci $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$.

Definiční obor kvadratické funkce jsou reálná čísla, obor hodnot je otevřený interval v reálných číslech. Grafem kvadratické funkce je parabola.

Opět můžeme kvadratickou funkci chápat tak, že vznikla změnou grafu funkce $g(x) = x^2$.



Obrázek 3.3: Části grafů kvadratických funkcí.

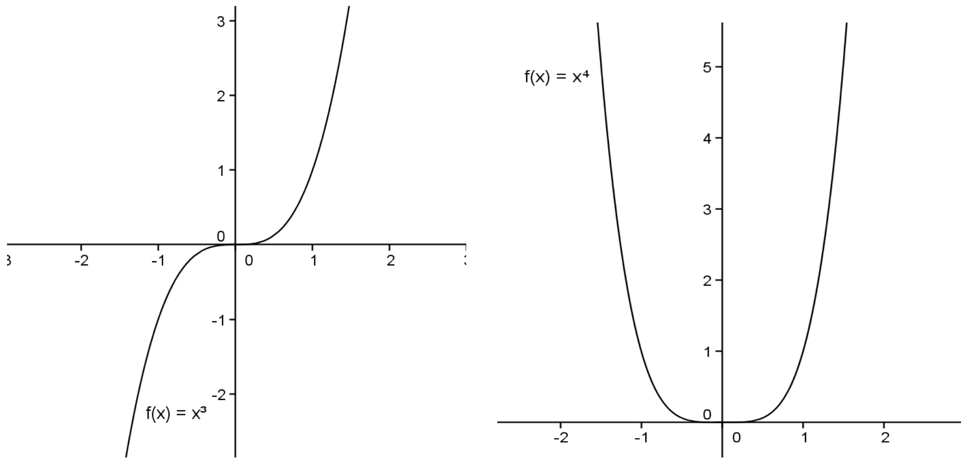
🕮 Mocninné funkce s celočíselnými kladnými mocninami.

Definice 3.0.4. *Mocninnou funkcí s celočíselnou kladnou mocninou* budeme rozumět funkci $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definiční obor pro tyto typy funkcí je celá množina reálných čísel. Obor hodnot pro sudé n *je interval* $[0, \infty)$ *a pro liché* n *je* $\mathbb{R}$. *Mezi tyto typy funkcí funkcí patří i funkce lineární a kvadratické. Pro* $n = 3$ *budeme hovořit o funkcích kubických.*

Pro n *sudé je funkce sudá na* $\mathbb{R}$ *a na intervalu* $(-\infty, 0)$ *klesající, na* $(0, \infty)$ *rostoucí. Pro* n *liché je funkce lichá na* $\mathbb{R}$ *a také je na celém definičním oboru* $\mathbb{R}$ *rostoucí.*

🕮 Mocninné funkce s kladnými racionálními mocninami.



Obrázek 3.4: Části grafů mocninných funkcí s mocninami 3 a 4.

Definice 3.0.5. *Mocninnou funkcí s kladnou racionální mocninou* budeme rozumět funkci

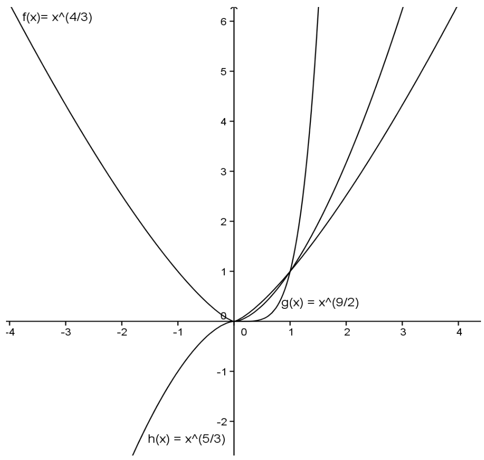
$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},\ m, n \in \mathbb{N},$$

přičemž čísla $m,\ n$ jsou nesoudělná.

Pro $m,\ n$ obě lichá je definiční obor $\mathbb{R}$, obor hodnot $\mathbb{R}$ a funkce je rostoucí na celém definičním oboru a je lichá.

Pro m liché a n sudé je definiční obor $[0, \infty)$, obor hodnot $[0, \infty)$ a funkce je rostoucí na celém definičním oboru

Pro m sudé a n liché je definiční obor $\mathbb{R}$, obor hodnot $[0, \infty)$ a funkce je klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $(0, \infty)$ a je sudá.



Obrázek 3.5: Části grafů funkcí $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $g(x) = x^{\frac{9}{2}}$ a $h(x) = x^{\frac{5}{3}}$.

Poznámka 3.0.1 (Mocninné funkce se zápornými mocninami)**.** Pro mocninné funkce se zápornými racionálními mocninami platí $x^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{m/n}},\ m, n \in \mathbb{N}$, m a n jsou nesoudělná. U těchto funkcí do definičního oboru nepatří 0 a závisí na tom, zda m a n jsou sudá, lichá. Pozorný čtenář si snadno rozmyslí, jaké jsou definiční obory a obory hodnot v případech $m,\ n$ obě lichá, m liché a n sudé a m sudé a n liché.

Mezi tento typ funkcí patří i funkce $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Tato funkce popisuje nepřímou úměru.

Věta 3.0.1 (Pravidla pro počítání s mocninami)**.** *Nechť $a\,b$ jsou kladná reálná čísla, $r\ s$ jsou racionální čísla. Pak platí*

1. $a^r.a^s = a^{r+s}$,
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,
3. $(a^r)^s = a^{rs}$,
4. $(ab)^s = a^s.b^s$

Poznámka 3.0.2 (Mocninné funkce s iracionálním exponentem)**.** Mocninné funkce s iracionálním koeficientem jsou tvaru $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{I}$. K jejich definování se využívá přirozené exponenciální a přirozené logaritmické funkce (viz. další kapitola) následujícím způsobem $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Definiční obor i obor hodnot jsou $(0, \infty)$. Pro $\alpha > 0$ je funkce rostoucí, $\alpha < 0$ je funkce klesající na celém definičním oboru.