Kapitola 5

Goniometrické a hyperbolické funkce

V této kapitole budou uvedeny základní poznatky týkající se goniometrických funkcí - sinus, kosinus, tangens, kotangens a hyperbolických funkcí - sinus hyperbolický, kosinus hyperbolický, tangens hyperbolický, kotangens hyperbolický.

5.1 Goniometrické funkce

Motivace

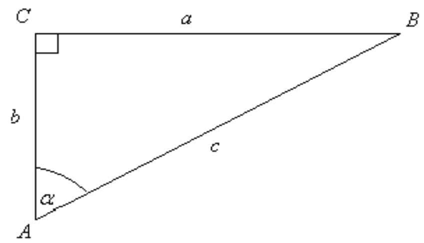
Nejdříve připomeňme známé vztahy z pravoúhlého trojúhelníku. V trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, úhlem o velikosti α při vrcholu A a se stranami o délkách a, b, c, viz obr. **??**, *jsou pomocí následujících vztahů definovány trigonometrické funkce:*

$$\sin\alpha = \frac{\textit{délka protilehlé strany}}{\textit{délka přepony}} = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{\textit{délka přilehlé strany}}{\textit{délka přepony}} = \frac{b}{c} \tag{5.1}$$

a také

$$\mathit{tg}\ \alpha = \frac{\textit{délka protilehlé strany}}{\textit{délka přilehlé strany}} = \frac{a}{b}, \quad \mathit{cotg}\ \alpha = \frac{\textit{délka přilehlé strany}}{\textit{délka protilehlé strany}} = \frac{b}{a}. \tag{5.2}$$

Takto zavedené funkce mají definiční obor $(0, \frac{\pi}{2})$. Přirozeným způsobem lze definiční obor rozšířit na celou



Obrázek 5.1:

množinu reálných čísel, pak hovoříme o funkcích goniometrických. V následující části se budeme zabývat vlastnostmi jednotlivých funkcí a to nám pomůže blíže pochopit, jak se tyto funkce chovají na definičním oboru.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

Lze ukázat, že tyto funkce mají následující vlastnosti.

Věta 5.1.1. 1. *Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže pro jejich definiční obory platí $D(\sin) = \mathbb{R}$ a $D(\cos) = \mathbb{R}$.*

2. *Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou na svých definičních oborech omezené, přičemž pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$|\sin x| \leq 1, \ \textit{resp.}\ |\cos x| \leq 1.$$

Pro jejich obory hodnot platí pro sinus $\langle -1, 1\rangle$ a pro kosinus $H(\cos) = \langle -1, 1\rangle$.

3. *Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou periodické s minimální periodou 2π. To znamená, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí*
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \text{ resp. } \cos(x + 2k\pi) = \cos x.$$

4. *Funkce $\sin x$ je lichá a funkce $\cos x$ je sudá, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*
$$\sin(-x) = -\sin x, \text{ resp. } \cos(-x) = \cos x.$$

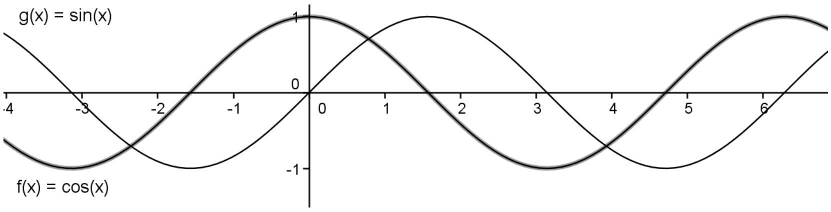
Funkce sinus a kosinus jsou na některých intervalech kladné, resp. záporné. Na některých intervalech jsou rostoucí, resp. klesající. Tyto vlastnosti jsou schematicky zapsány v následující tabulce

interval x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin x$	*+/rost.*	*+/kles.*	*-/kles.*	*-/rost.*
$\cos x$	*+/kles.*	*-/kles.*	*-/rost.*	*+/rost.*

Úloha 5.1.1 *Pro $x \in \mathbb{R}$ platí:*

a) $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, *b)* $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$,
c) $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$, *d)* $\sin(x + \pi/2) = \cos x$,
e) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, *f)* $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

Rozmyslete si, jak tyto vztahy souvisí s grafy příslušných funkcí.



Obrázek 5.2: Část grafů funkcí sinus a kosinus.

Vlastnosti funkcí tangens a kotangens

Lze ukázat, že funkce tangens a kotangens mají následující vlastnosti.

Věta 5.1.2. 1. *Funkce tg x je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která není $\cos x = 0$, tj. s výjimkou bodů $x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$. To znamená, že pro definiční obor funkce tg x platí*
$$D(tg) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}.$$

Funkce cotg x je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která není $\sin x = 0$, tj. s výjimkou bodů $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. To znamená, že pro definiční obor funkce cotg x platí
$$D(cotg) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}.$$

2. *Funkce tg x a cotg x nejsou na svých definičních oborech omezené. Pro obory hodnot těchto funkcí platí*
$$H(tg) = \mathbb{R}, \text{ resp. } H(cotg) = \mathbb{R}.$$

3. *Funkce tg x a cotg x jsou periodické s nejmenší periodou π. To znamená, že pro všechna $x \in D(tg)$, resp. pro všechna $x \in D(cotg)$, a pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ platí*

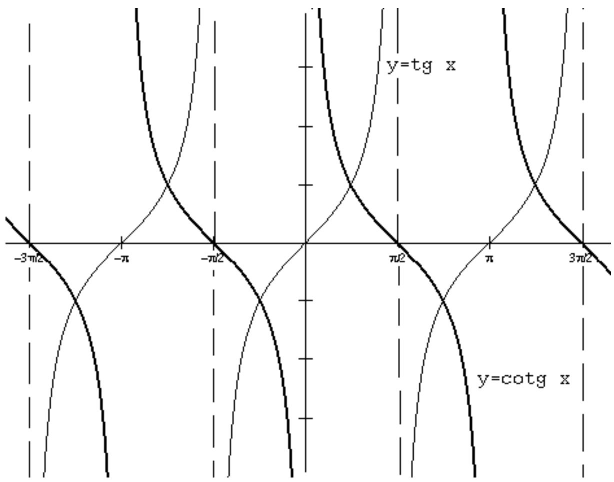
$$tg\ (x + k\pi) = tg\ x,\ resp.\ cotg\ (x + k\pi) = cotg\ x.$$

4. *Funkce tg x a cotg x jsou liché, takže že pro všechna $x \in D(tg)$, resp. pro všechna $x \in D(cotg)$ platí*

$$tg\ (-x) = -tg\ x,\ resp.\ cotg\ (-x) = -cotg\ x.$$

Funkce tangens a kotangens jsou na některých intervalech kladné, resp. záporné. Na některých intervalech jsou rostoucí, resp. klesající. Tyto vlastnosti jsou schematicky zapsány v následující tabulce.

interval x	$(0,\ \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2},\ \pi)$	$(\pi,\ \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi)$
tg x	*+/rost.*	*-/rost.*	*+/rost.*	*-/rost.*
cotg x	*+/kles.*	*-/kles.*	*+/kles.*	*-/kles*



Obrázek 5.3: Část grafů funkcí tangens a kotangens.

🕮 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

Věta 5.1.3 (Vzájemné vztahy).

1. *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

2. *Pro libovolné $x \in D(tg) \cap D(cotg) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ platí*

$$tg\ x \cdot cotg\ x = 1.$$

Věta 5.1.4 (Součtové vzorce). *Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Věta 5.1.5 (Dvojnásobné úhly). *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Věta 5.1.6 (Poloviční úhly). *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Věta 5.1.7 (Součty a rozdíly goniometrických funkcí). *Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro všechna $y \in \mathbb{R}$ platí vztahy*

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Řešení goniometrických rovnic

K řešení goniometrických rovnic se využívá výše uvedených vlastností goniometrikých funkcí.

Příklad 5.1.1. V množině $\mathbb{R}$ nalezněte všechna řešení rovnice $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

***Řešení:* 5.1.1.** Pomocí substituce $u = \sin x$ získáme kvadratickou rovnici $2u^2 + 3u - 2 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $u_1 = -2$, $u_2 = \frac{1}{2}$. Je-li $u = -2$ získáme rovnici $\sin x = -2$, která nemá řešení, protože -2 neleží v oboru hodnot funkce sinus. Je-li $u = \frac{1}{2}$, získáme rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$, jejímž řešením získáme $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ nebo $x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Množina řešení je

$$\mathbf{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}.$$

Příklad 5.1.2. V množině $\mathbb{R}$ nalezněte všechna řešení rovnice $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 3$.

***Řešení:* 5.1.2.** Vše převedeme na jednu stranu stranu rovnice $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x - 3 = 0$. Poté vytkneme $4\sin^2 x(\sin x + 1) - 3(\sin x + 1) = 0$, celkově $(4\sin^2 x - 3)(\sin x + 1) = 0$. Rovnost 0 nastává, jestliže platí některá z podmínek $(4\sin^2 x - 3) = 0$, $(\sin x + 1) = 0$.

1) Pro $(\sin x + 1) = 0$ platí $\sin x = -1$. Jejím řešením je $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) Pro $(4\sin^2 x - 3) = 0$ platí $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, tedy $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Jejím řešením je $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $x_5 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Množina řešení je

$$\mathbf{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}.$$

Příklad 5.1.3. V množině $\mathbb{R}$ nalezněte všechna řešení rovnice $\sin x + \cos 2x = 0$.

***Řešení:* 5.1.3.** Pro úpravu rovnice použijeme vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, dostáváme $\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$. Dále využijeme vztahu mezi sinem a kosinem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, z něhož vyjádříme $\cos^2 x$ a dosadíme $\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$. Nyní máme rovnici $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, dáme substituci $\sin x = t$. Získáme kvadratickou rovnici $2t^2 - t - 1 = 0$, její řešení jsou $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Pro $\sin x = 1$ je $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Pro $\sin x = -\frac{1}{2}$ je $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Množina řešení je

$$\mathbf{K} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}.$$

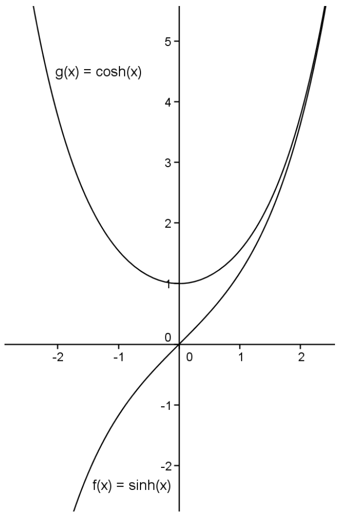
5.2 Hyperbolické funkce

V této části se budeme zabývat funkcemi hyperbolickými. Jejich název vznikl z vlastnosti, že pomocí hyperbolických funkcí se dá parametrizovat hyperbola. Každý bod ležící na hyperbole $[x, y]$ v pravoúhlých souřadnicích se dá vyjádřit rovnicemi $x = a \sinh t$, $y = b \cosh t$; $a, b > 0$ a $t \in \mathbb{R}$. My se však v této kapitole nebudeme zabývat těmito geometrickými, třebaže zajímavými vlastnostmi. Poznamenejme, že pomocí goniometrických funkcí se dá podobným způsobem parametrizovat elipsa.

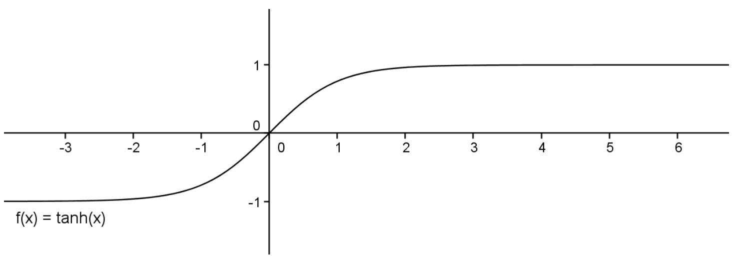
Hyperbolické funkce se dají zavést různými způsoby. V této kapitole si ukážeme zavedení pomocí Eulerova čísla.

Sinus hyperbolický je funkce $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. *Definičním oborem je množina reálných čísel a oborem hodnot je interval* $(0, \infty)$. *Kosinus hyperbolický je* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. *Definičním oborem a oborem hodnot je množina reálných čísel. Tangens hyperbolický je funkce* $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *Definičním oborem je množina reálných čísel a obor hodnot je interval* $(-1, 1)$.

Úloha 5.2.2 *R*
ozmyslete si jak vypadá kotangens hyperbolický, jestliže je to je funkce $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. *Zkuste samostatně načrtnout graf funkce. Jaký je definiční obor a obor hodnot této funkce?*



Obrázek 5.4: Část grafů funkcí sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický.



Obrázek 5.5: Část grafu funkce tangens hyperbolický.

Věta 5.2.1 (Vzájemné vztahy)**.**

1. *Pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

2. *Pro libovolné* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *platí*

$$\tanh x \cdot \coth x = 1.$$

Věta 5.2.2 (Součtové vzorce)**.** *Pro libovolná* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y,$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y.$$

Věta 5.2.3 (Dvojnásobné úhly)**.** *Pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Věta 5.2.4 (Dvojnásobné úhly)**.** *Pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Věta 5.2.5 (Poloviční úhly)**.** *Pro libovolné* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\left|\sinh \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}},$$
$$\left|\cosh \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cosh x}{2}}.$$

Věta 5.2.6 (Součty a rozdíly goniometrických funkcí)**.** *Pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a pro všechna* $y \in \mathbb{R}$ *platí vztahy*

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2},$$
$$\sinh x - \sinh y = 2 \sinh \frac{x-y}{2} \cosh \frac{x+y}{2},$$
$$\cosh x + \cos y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2},$$
$$\cosh x - \cosh y = -2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}.$$

Hyperbolické funkce.

Příklad 5.2.1. Vypočtěte funkční hodnoty funkcí sinus hyperbolický, kosinus hyperbolický, tangens hyperbolický, kotangens hyperbolický v bodě 0.

Řešení: **5.2.1.** Dosazením do vzorců získáme pro sinus hyperbolický $\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$, pro kosinus hyperbolický $\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$. Tangens hyperbolický je $\tanh 0 = \frac{\sinh 0}{\cosh 0} = \frac{0}{1} = 0$. Protože pro kotangens hyperbolický platí $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, není v nule definován.

Příklad 5.2.2. V množině $\mathbb{R}$ naleznětě všechna řešení rovnice $\sinh^2 x + \cosh^2 x = 1$.

Řešení: **5.2.2.** Ze vztahu $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ vyjádříme například $\cosh^2 = \sinh^2 x + 1$ a dosadíme do rovnice $\sinh^2 x + \sinh^2 x + 1 = 1$. Tedy hledáme řešení $\sinh^2 x = 0$, což je splněno pouze pro $\sinh x = 0$. Rovnice má jediné řešení $x = 0$.