Kapitola 6

Posloupnosti a limity posloupností

V této kapitole se budeme zabývat pojmem posloupnost, jejími speciálními případy aritmetickou a geometrickou posloupností, a limitou posloupnosti.

6.1 Posloupnosti

Motivace - úspory

Petr a Martin jsou bratři. Vždy první den v měsíci dostávají kapesné, každý z nich dostává 200*Kč. Oba se rozhodli, že budou své kapesné budou nějakou dobu spořit.*

Martin bude každý měsíc ukládat úspory do pokladničky. Vždy poslední den v měsíci bude mít Martin v pokladničce

$$200Kč, 400Kč, 600Kč, 800Kč, \ldots$$

Je zřejmé, že hodnotu Martinových úspor v $n-$*tém měsíci, kde* $n \in \mathbb{N}$*, lze vyjádřit pomocí funkce*

$$f(n) = n.200.$$

Definičním oborem této funkce je množina všech přirozených čísel, tj. $D(f) = \mathbb{N}$.

Petr vzal kapesné uspořené za předchozí rok a vložil do banky 2400*Kč. Kapesné, které bude dostávat v dalším roce se rozhodl průběžně utrácet. Na konci každého měsíce mu banka vyplácet* $0,5\%$ *z hodnoty na jeho účtu v daném měsíci a jako student nemusí platit žádné bankovní poplatky. Jeho úspory se tedy vyvíjejí následujícím způsobem (vždy poslední den v měsíci bude na účtu)*

$$2412Kč, 2424,06Kč, 2436,1803Kč, 2448,3612015Kč, \ldots$$

Snadno vidíme, že částku na konci prvního měsíce lze vypočítat jako $2400\,.\,1,005 = 2412$*. Na konci druhého měsíce* $2412\,.\,1,005 = 2400\,.\,1,005^2$*, atd. Tedy hodnotu úspor na konci* $n-$*tého měsíce, kde* $n \in \mathbb{N}$*, lze vyjádřit pomocí funkce*

$$g(n) = 2400\,.\,1,005^n.$$

Definičním oborem této funkce je opět množina všech přirozených čísel, tj. $D(g) = \mathbb{N}$.

Jak bylo zdůrazněno, jsou funkce f *i* g *příklady funkcí, jejichž definičním oborem je množina* $\mathbb{N}$ *všech přirozených čísel. Funkce, které mají takovýto definiční obor dostaly speciální název – posloupnosti.*

Poznamenejme, že vývoj Martinových úspor je popsán pomocí aritmetické posloupnosti (vždy se každý měsíc přičítá stejná částka) a vývoj Petrových úspor pomocí geometrické posloupnosti (vždy se násobí stejným koeficientem). V další části výkladu si uvedeme definice pojmů posloupnost, aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost a také některé vlastnosti posloupností.

Základní pojmy

Zformulujme nyní definici posloupnosti.

Definice 6.1.1. Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel se nazývá *posloupnost*, případně *nekonečná posloupnost*. Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina k prvních přirozených čísel $\{1, 2, \dots, k\}$ se nazývá *konečná posloupnost*. Funkční hodnoty každé posloupnosti se nazývají *členy posloupnosti*.

Poznámka 6.1.1. Funkční hodnota posloupnosti f v bodě $n \in \mathbb{N}$ se nazývá *$n-$tý člen posloupnosti* a místo $f(n)$ se častěji značí f_n nebo a_n, b_n, apod. Posloupnost s $n-$tým členem a_n se značí $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo krátce (a_n).

Funkční předpis posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lze zadat některým z následujících způsobů:

1. *předpisem, který vyjadřuje $n-$tý člen posloupnosti.*

   Příklad 6.1.1. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{4},\, \frac{1}{6}, \dots\right)$

   Příklad 6.1.2. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\cos \frac{n\pi}{2}\right)_{n=1}^{\infty} = (0,\, -1,\, 0,\, 1 \dots).$

2. *rekurentně, tj. zadáním prvního členu posloupnosti a_1 a předpisem, jak určit $(n+1)-$ní člen posloupnosti pomocí předcházejícího členu posloupnosti (nebo obecněji zadáním k prvních členů posloupnosti $a_1, \dots, a_k$ a předpisem, jak určit $(n+1)-$ní člen posloupnosti pomocí k předcházejících členů).*

   Příklad 6.1.3. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$, tj. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1,\, 3,\, 7,\, 15, \dots).$

   Příklad 6.1.4. Je-li $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, pak se jedná o posloupnost

   $$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1,\, 1,\, 2,\, 3,\, 5,\, 8,\, 13, \dots).$$

Všimněte si, že existuje způsob zadání posloupnosti, který je odlišný od možností zadávání funkce. Posloupnost můžeme znázornit pomocí grafu posloupnosti, což je množina bodů $[n, a_n], n \in \mathbb{N}$ zakreslených v pravoúhlé soustavě souřadnic. Stejně tak lze posloupnosti charakterizovat pomocí některých vlastností, které jsou souhrnně uvedeny v následující definici.

Definice 6.1.2. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

$$\left.\begin{array}{l} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{nerostoucí} \\ \textit{neklesající} \\ \textit{konstantní} \end{array}\right\}, \text{ je-li pro všechna } n \in \mathbb{N} \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} > a_n \\ a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \\ a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} = a_n \end{array}\right. .$$

Má-li posloupnost některou z prvních čtyřech uvedených vlastností, nazývá se *monotónní*. Má-li posloupnost některou z prvních dvou vlastností, nazývá se *ryze monotónní*.

Příklad 6.1.5. Rozhodněme, zda je posloupnost $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.

***Řešení:* 6.1.1.** Jedná se o posloupnost $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots\right)$. Zdá se, že tato posloupnost je rostoucí. Dokažme tedy že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} > a_n$. Pokud $a_{n+1} > a_n$, pak

$$\Bigg\Downarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{n+1}{n+2} > \dfrac{n}{n+1}, \\ (n+1)(n+1) > n(n+2), \\ n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n, \\ 1 > 0. \end{array} \quad \Bigg\Uparrow$$

Při úpravách jsme používali pouze ekvivalentní úpravy a tedy můžeme postupovat také zdola nahoru. To znamená, že pokud $1 > 0$, je pro každé $n \in \mathbb{N}$ také $a_{n+1} > a_n$.

Definice 6.1.3. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

$$\left.\begin{array}{l}\textit{shora omezená}\\ \textit{zdola omezená}\end{array}\right\},\ \text{existuje-li takové číslo}\ \left\{\begin{array}{c}H \in \mathbb{R}\\ D \in \mathbb{R}\end{array}\right\},\ \text{že pro každé}\ n \in \mathbb{N}\ \text{je}\ \left\{\begin{array}{c}a_n \leq H\\ a_n \geq D\end{array}\right. .$$

Je-li posloupnost omezená shora i zdola, nazývá se *omezená.*

Příklad 6.1.6. Ukážeme, že posloupnost $\left(\dfrac{10n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora i zdola.

Řešení: **6.1.2.** Jedná se o posloupnost $(5, \frac{20}{3}, \frac{15}{2}, 8, \frac{25}{3}, \dots)$. Členy této posloupnosti jsou zřejmě zdola omezeny např. číslem 4 a shora např. číslem 10. Domníváme se tedy, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $4 < \frac{10n}{n+1} < 10$. Dokažme to.

- Je
$$\Bigg\Downarrow \quad \begin{array}{c} 4 < \dfrac{10n}{n+1},\\ 4n+4 < 10n,\\ 6n > 4,\\ n > \frac{2}{3}. \end{array} \quad \Bigg\Uparrow$$
Při úpravách jsme používali pouze ekvivalentní úpravy, tj. můžeme postupovat také obráceně. To znamená, že pro $n > \frac{2}{3}$ (což platí, protože $n \in \mathbb{N}$), platí $\forall n \in \mathbb{N} : 4 < \frac{10n}{n+1}$ a posloupnost je zdola omezená.

- Je
$$\Bigg\Downarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{10n}{n+1} < 10,\\ 10n < 10n+1,\\ 0 < 1. \end{array} \quad \Bigg\Uparrow$$
Při úpravách jsme používali pouze ekvivalentní úpravy, takže můžeme postupovat obráceně. Tedy, je-li $0 < 1$, pak $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{10n}{n+1} < 10$ a posloupnost je shora omezená.

- Posloupnost je shora i zdola omezená, tedy je omezená.

Příklad 6.1.7. Posloupnost $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4} \dots\right)$ je omezená a není monotónní.

Příklad 6.1.8. Posloupnost $\left((-1)^n \cdot n^2\right)_{n=1}^{\infty} = (-1, 4, -9, 16 \dots)$ není omezená a není monotónní.

🕮 Posloupnosti - aritmetická a geometrická posloupnost

Definice 6.1.4. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *aritmetická,* právě když existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí
$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{6.1}$$
Číslo d nazýváme *diference* aritmetické posloupnosti.

*V aritmetické posloupnosti tedy podle vztahu (**??**) pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí*
$$a_{n+1} - a_n = d \tag{6.2}$$
a lze formulovat následující tvrzení.

Věta 6.1.1. *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, právě když je posloupnost $(a_{n+1} - a_n)_{n=1}^{\infty}$ konstantní.*

Příklad 6.1.9. Ukažme, že posloupnost $\left(\dfrac{2n-1}{3}\right)$ je aritmetická.

***Řešení:* 6.1.3.** Je $a_n = \dfrac{2n-1}{3}$ a $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3}$, to znamená, že

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{3} - \frac{2n-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Podle předchozího tvrzení je tedy posloupnost aritmetická, přičemž $a_1 = \dfrac{1}{3}$ a $d = \dfrac{2}{3}$.

Věta 6.1.2. *V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí následující vztahy*

- $a_n = a_1 + (n-1)d$, *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$,
- $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n+1}\right)$, *pro libovolné* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,
- $a_n = a_m + (n-m)d$, *pro libovolné* $m, n \in \mathbb{N}$,
- $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$, *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$.

Definice 6.1.5. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická*, právě když existuje takové $q \in \mathbb{R}$, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n.q. \tag{6.3}$$

Číslo q nazýváme *kvocient* geometrické posloupnosti.

*Pro $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$ tedy podle (**??**) v geometrické posloupnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \tag{6.4}$$

a lze formulovat následující tvrzení.

Věta 6.1.3. *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická a $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$, právě když je posloupnost $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konstantní.*

Příklad 6.1.10. Ukážeme, že posloupnost $\left(\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)$ je geometrická.

***Řešení:* 6.1.4.** Je $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ a $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}$. To znamená, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}.\frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{3}.$$

Podle předchozího tvrzení je tedy posloupnost geometrická, přičemž $a_1 = \dfrac{2}{9}$ a $q = \dfrac{2}{3}$.

Věta 6.1.4. *V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí*

- $a_n = a_1.q^{n-1}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$,
- $|a_n| = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$ *pro libovolné* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,
- $a_n = a_m.q^{n-m}$ *pro všechna* $m, n \in \mathbb{N}$,
- *pro součet prvních n členů posloupnosti platí*
  - *je-li* $q \neq 1$, *pak* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$,
  - *je-li* $q = 1$, *pak* $s_n = n.a_1$.

Aplikace pojmu posloupnost

Posloupnosti se dají využít v bankovnictví při výpočtu úroků. Lze je aplikovat na výpočet výnosů z vkladů a úroků z půjček. My si přiblížíme dva pojmy úročení jednoduché úročení a složené úročení.

Příklad 6.1.11 (Aritmetická posloupnost a jednoduché úročení)**.** Představme si, že jsme si půjčili částku P Kč a za tuto službu budeme věřiteli platit odměnu – úroky. Podstata jednoduchého úročení spočívá v tom, že se úroky na konci každého úrokovacího období počítají stále z počáteční hodnoty půjčky a přičítají se k dlužné částce. Pro výpočet budeme potřebovat následující informace:

- počáteční hodnotu půjčky P,
- úrokovou míru $r \in [0, 1]$,
- počet $t \in \mathbb{N}$ úrokovacích období, po které půjčka trvá.

Úrok započítaný za první úrokovací období lze vyjádřit jako součin hodnoty půjčky a úrokové míry. Po prvním úrokovacím období bude tedy věřitel dlužit částku

$$P + rP = P(1 + r).$$

Při druhém úrokovacím období se k dlužné částce opět přičte úrok rP, tedy budeme dlužit hodnotu

$$(P + rP) + rP = P(1 + 2r).$$

Budeme-li tímto způsobem pokračovat, a označíme-li hodnotu dlužné částky D, budeme v $t-$tém období dlužit celkovou částku danou funkcí

$$D : t \mapsto P(1 + tr).$$

To je předpis aritmetické posloupnosti s prvním členem $D_1 = P(1 + r)$ a diferencí $d = rP$.

Příklad 6.1.12 (Geometrická posloupnost a složené úročení)**.** Představme si, že v nějaké bance založíme účet, na který vložíme určitý obnos – počáteční vklad P Kč. Očekáváme, že nám za tuto službu bude banka k této částce připisovat odměnu – úroky. Složené úročení je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z již dosažené hodnoty účtu a k této dosažené hodnotě se přičítá. Jak vypočítat celkovou hodnotu účtu po t letech? Budeme potřebovat následující informace:

- hodnotu počátečního vkladu P, tzv. *jistinu,*
- úrokovou míru $r \in [0, 1]$,
- počet $k \in \mathbb{N}$ úrokovacích období za rok,
- délku $t \in \mathbb{N}$ časového intervalu existence účtu vyjádřenou v rocích.

Úrok započítaný po prvním úrokovacím období lze vyjádřit jako součin jistiny a hodnoty r/k. To znamená, že hodnota účtu po prvním úrokovacím období je

$$P + P\left(\frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right).$$

Při druhém úrokovacím období lze za jistinu pokládat aktuální hodnotu $P(1 + r/k)$. To znamená, že po dvou úrokovacích obdobích je hodnota účtu dána předpisem

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right) + P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\left(\frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\left(1 + \frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^2.$$

Všimněte si, že výpočet nové hodnoty probíhá stejným způsobem jako v prvním úrokovacím období, pouze se změnila hodnota jistiny. Budeme-li tímto způsobem pokračovat dále, získáme po k úrokovacích obdobích hodnotu účtu za jeden rok, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k.$$

Protože úročení probíhá t roků, jedná se celkem o kt úrokovacích období a konečnou hodnotu účtu v čase $t \in \mathbb{N}$, kterou označíme symbolem V, lze vyjádřit předpisem

$$V : t \mapsto P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}. \tag{6.5}$$

To je předpis geometrické posloupnosti s prvním členem $V_1 = P(1+r/k)^k$ a kvocientem $q = (1+r/k)^k$.

Uvědomme si, že příklad Petrova spoření uvedený na začátku kapitoly je přesně složené úročení. Jistina $P = 2400$ Kč, úrok 6% za rok, tj. $r = 0,06$, a že úročení probíhá jednou za měsíc, v roce 12krát, tj $k = 12$. Získáme tak posloupnost, jejíž $t-$tý člen je dán předpisem

$$V_t = 100(1 + 0,005)^{12t}.$$

Připomeňme, že t je počet let od začátku spoření.

6.2 Limita posloupnosti

Budeme se zabývat chováním posloupnosti pro velmi vysoká přirozená čísla. Seznámíme se s pojmy limita posloupnosti, konvergentní posloupnost.

Délka úsečky

Představme si úsečku jejíž délka je rovna 1*. Z té úsečky vytvoříme další tak, že vždy předchozí úsečku rozdělíme na polovinu. Takže dostáváme posloupnost délek úseček* 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\ldots$*. Délka* $n-$*té úsečky se dá zapsat* $\frac{1}{2}^{n-1}$ *pro* $n \in \mathbb{N}$*. Zkuste si nakreslit obrázek, úsečku délky* 1 *rozdělíme na polovinu, vybereme si jednu z polovin rozdělíme ji na polovinu a stále opakujeme. Snadno vidíte, že se velikost úsečky rychle zmenšuje a začíná se blížit* 0*. Říkáme, že se délka úsečky blíží ke své limitě* 0*.*

Nyní již můžeme vyslovit následující definici.

Definice 6.2.1 (Konečná limita posloupnosti)**.** Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *limita posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - a| < \varepsilon$, jestliže $n \geq n_0$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pak nazýváme *konvergentní.*

Poznámka 6.2.1. Symbolicky můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\,(n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Poznámka 6.2.2. Místo zápisu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ se také používá zápis $a_n \to a$, který lze číst tak, že posloupnost a_n konverguje ke své limitě a.

Poznámka 6.2.3. Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a hodnota její limity je a, pak vztah $|a_n - a| < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ splňují skoro všechny členy posloupnosti, tj. všechny členy až na konečný počet prvních n_0 členů. Toto pozorování sledujte také v následujících řešených příkladech.

Jestliže posloupnost a_n *nemá konečnou limitu, tj. není konvergetní, nazývá se divergentní posloupností. Některým divergentní posloupnostem lze pomocí následující definice také přiřadit limitu.*

Definice 6.2.2 (Nekonečné limity posloupnosti)**.** Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *limitu plus nekonečno*, právě když pro každé číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má *limitu minus nekonečno*, právě když pro každé číslo L existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n < L$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Příklady

Příklad 6.2.1. Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

***Řešení:* 6.2.1.** Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$ a hledejme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{1+n} < \varepsilon.$$

Vztah $1/(1+n) < \varepsilon$ platí pro taková $n \in \mathbb{N}$, pro která $n > 1/\varepsilon - 1$. Položme tedy $n_0 = [1/\varepsilon - 1] + 1$. Pokud např. zvolíme $\varepsilon = 10^{-2}$, pak $n_0 = 100$ a všechny členy $a_{100}, a_{101}, a_{102}, \dots$ se od limity, tj. od čísla 1, liší méně než o $10^{-2} = 0,01$.

Příklad 6.2.2. Ukážeme, že posloupnost $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

***Řešení:* 6.2.2.** Vypíšeme-li několik prvních členů posloupnosti, získáme

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right).$$

Zdá se tedy, že s rostoucím $n \in \mathbb{N}$ se hodnota členů přibližuje k 0. Vyslovíme hypotézu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

kterou dokážeme: Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$ a hledejme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Vztah $1/2^n < \varepsilon$ platí pro taková $n \in \mathbb{N}$, pro která $2^n > 1/\varepsilon$, neboli

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}. \tag{6.6}$$

- Pro $\varepsilon \geq 1$ je $\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon} = -\log_2 \varepsilon \leq 0$, takže (**??**) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a za $n_0 \in \mathbb{N}$ lze vybrat libovolné číslo.
- Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ je $\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon} = -\log_2 \varepsilon > 0$. Položíme-li $n_0 = [-\log_2 \varepsilon] + 1$, pak (**??**) platí pro všechna $n \geq n_0$. Je-li např. $\varepsilon = 10^{-6}$, pak $n_0 = 20$, takže všechny členy posloupnosti $a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots$ se od limity, tj. od čísla 0, liší méně než o $10^{-6} = 0,000\,001$.

Aplikace pojmu limita

Již jsme viděli, jak užitečný je pojem limity posloupnosti při výpočtu odmocniny čísla. Podívejme se nyní na další úlohu, ve které ukážeme ekonomický význam čísla e.

Příklad 6.2.3 (Ekonomický význam čísla e)**.** Představme si, že se nám podařilo nalézt banku, která náš počáteční vklad úročí složeným úročením s úrokovou mírou 100%, tj. $r = 1$. Ptejme se, jakou hodnotu bude v takové bance mít počáteční vklad $P = 1$ Kč na konci prvního roku, tj. $t = 1$, jestliže se úroky připisují každý okamžik, tj. počet úrokovacích období je nekonečný. Použijeme -li odvozený vztah (**??**) a označíme-li počet úrokovacích období n, získáme posloupnost

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Položenou otázku lze nyní přeformulovat a ptát se, zda existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

této posloupnosti a jakou má hodnotu. Je zřejmé, že požadovanou hodnotu nelze získat jako funkční hodnotu přímým dosazením za n. Přesto učiňme několik výpočtů, je

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left(1+\tfrac{1}{1}\right)^1 = 2\\
a_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25\\
a_3 &= \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^3 = 2,370\dots\\
&\dots\\
a_{100} &= \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704\dots
\end{aligned}$$

Vypočtené hodnoty poukazují na následující vlastnost: s rostoucím n se členy a_n posloupnosti zvětšují. Lze také ukázat, že přitom nepřekročí jistou horní mez. Dále lze ukázat, že existuje právě jedno reálné číslo, které je nejmenší horní mezí čísel a_n. Pro rostoucí n se členy a_n této mezi – limitní hodnotě – stále více přibližují. Z historických důvodů tuto limitu nazýváme Eulerovo číslo nebo základ přirozeného logaritmu a značíme ji e. Podrobněji je možné zjistit, že

$$e = 2.7182818284590452353602874713 5\dots.$$

Uvedený výsledek lze interpretovat tak, že ve štědré bance, kterou se nám podařilo nalézt, by se náš počáteční vklad 1 Kč za jeden rok zvětšil na přibližně $2,72$ Kč.

Příklad 6.2.4. V aplikacích se často pracuje s geometrickou posloupností. Navážeme na příklad **??** a ukážeme, že geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$, pro kterou $|q|<1$, je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Řešení: **6.2.3.** Je třeba ukázat, že k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ umíme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|q^n - 0| < \varepsilon$, neboli $|q|^n < \varepsilon$. Logaritmováním obou stran nerovnosti získáme $\log|q|^n < \log\varepsilon$,[1] neboli $n\log|q| < \log\varepsilon$. Protože $|q|<1$, je $\log|q| < 0$, takže

$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}.$$

Za uvedených předpokladů lze celou úvahu zapsat stručněji ve tvaru

$$|q|^n < \varepsilon \iff \log|q|^n < \log\varepsilon \iff n\log|q| < \log\varepsilon \iff n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|}.$$

Položíme-li $n_0 = [\log\varepsilon/\log|q|] + 1$, pak pro libovolné $n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|q|^n < \varepsilon$ a jsme hotovi.

🕮 Vlastnosti a výpočty limit posloupností

Zjistíme-li, že má určitá posloupnost konečnou limitu, bylo by dobré, aby byla tato hodnota určena jednoznačně. Jinak by se jednalo o slabý pojem. Následující věta ukazuje, že tomu tak skutečně je.

Věta 6.2.1 (O počtu limit)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Uvedené větě je třeba rozumět tak, že posloupnost limitu buď nemá, tj. je divergentní, nebo má právě jednu limitu. Má-li určitá posloupnost konečnou limitu, nemohou si její členy dělat, co by se jim chtělo. Následující věta ukazuje, jak je omezena svoboda členů konvergentní posloupnosti.

Věta 6.2.2 (O omezenosti posloupnosti)**.** *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

[1]Oba logaritmy existují, protože $|q|^n > 0$ i $\varepsilon > 0$. Znaménko nerovnosti se nemění, protože log je rostoucí funkce.

Pokud jsme chtěli nalézt hodnotu limity konvergentní posloupnosti, postupovali jsme poněkud těžkopádnou metodou: uhodni a dokaž. *To je velmi nepraktické a chtělo by to vlastnit nějaké prostředky, které nám umožní hodnotu limity spočítat. Následující věta nám takové prostředky poskytne. S její pomocí pak už bude snadné hodnotu limity nalézt.*

Věta 6.2.3 (O aritmetických operacích s limitami). *Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnosti a*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

pak

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab,$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *pro* $b \neq 0,$
- $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|.$

Tedy každá z uvedených posloupností je konvergentní. Přitom v posloupnosti $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ vynecháváme členy s těmi indexy, pro které je $b_n = 0$ jichž je konečný počet, protože $b \neq 0$.

Použijeme-li výsledku uvedeném v příkladu **??** *a předchozí věty o limitě součinu konvergentních posloupností, získáme následující tvrzení.*

Věta 6.2.4 (O limitě geometrické posloupnosti). *Každá geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$, je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Příklady

Při výpočtech limit je dobré znát hodnoty limit některých posloupností. Budeme jim říkat typové limity. Při výpočtu se budeme snažit převést nebo rozložit předpis zadané limity na limity typové a pak použít větu o aritmetice limit posloupnosti. Typovými limitami budeme rozumět

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} k = k,$ *kde* $k \in \mathbb{R}$ *je kostanta*,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1, \ a > 0.$

Příklad 6.2.5. Ukážeme, že posloupnost $\left(\dfrac{1+5n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, a vypočteme její limitu.

***Řešení:* 6.2.4.** Upravíme nejdříve předpis posloupnosti, je

$$\frac{1+5n}{n} = \frac{1}{n} + 5.$$

Posloupnosti $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ a $(5)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní, proto podle věty o aritmetice konvergentních limit pro součet platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 5\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 5 = 0 + 5 = 5.$$

Příklad 6.2.6. Ukážeme, že posloupnost $\left(\dfrac{100}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, a vypočteme její limitu.

***Řešení:* 6.2.5.** Předpis posloupnosti lze psát ve tvaru

$$\frac{100}{n^2} = 100 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Posloupnosti $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ a $(100)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergetní a podle věty o aritmetice konvergentních limit pro součin platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 100 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 100 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Příklad 6.2.7. Ukážeme, že posloupnost $\left(\frac{1+3n}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, a vypočteme její limitu.

***Řešení:* 6.2.6.** Posloupnosti $(1+3n)_{n=1}^{\infty}$ a $(2n+1)_{n=1}^{\infty}$ nejsou konvergetní a větu o aritmetice limit pro podíl nelze použít, upravíme tedy předpis zadané posloupnosti v naději, že tuto větu nakonec budeme moci použít. Rozšíříme-li zadaný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$, získáme

$$\frac{1+3n}{2n+1} = \frac{\frac{1}{n}+3}{2+\frac{1}{n}}.$$

Posloupnosti $(1/n+3)_{n=1}^{\infty}$ a $(2+1/n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergetní a $2+1/n \neq 0$, můžeme tedy použít větu o aritmetice konvergentních limit pro podíl a získáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+3\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{2}.$$

Příklad 6.2.8. Ukážeme, že posloupnost $\left(\frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, a vypočteme její limitu.

***Řešení:* 6.2.7.** Ve tvaru, v jakém je posloupnost zadána, nelze použít větu o aritmetice limit, předpis tedy vhodně upravíme. Zlomek $\frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$ nejdříve usměrníme, tj. rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1}-n$, a pak čitatele i jmenovatele vydělíme výrazem n^2, získáme tak

$$\frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n} = \frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}-n} = \frac{n+1-2n\sqrt{n+1}+n^2}{n+1-n^2} \tag{6.7}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-2\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-1}. \tag{6.8}$$

Lze ověřit, že posloupnost $\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a její limita je 0. Podle věty o aritmetice limit posloupností pro součet a podíl můžeme nyní psát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} - 2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}$$

$$= \frac{0+0+2.0+1}{0+0-1} = -1.$$

Příklad 6.2.9. Ukážeme, že posloupnost $\left(\dfrac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, a vypočteme její limitu.

***Řešení:* 6.2.8.** Nejdříve si všimneme, že v čitateli je rozdíl součtu prvních členů dvou aritmetických posloupností, pro které lze použít větu **??**, konkrétně vztah pro součet členů aritmetické posloupnosti. Získáme tak

$$s_L(n) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{n}{2}(1+2n-2) = n^2,$$

$$s_S(n) = 2+4+6+\cdots+2n = \frac{n}{2}(2+2n) = n+n^2.$$

Použijeme-li tyto vztahy k úpravě předpisu, kterým je zadána posloupnost a použijeme-li větu o aritmetice limit posloupností, získáme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{s_L(n)-s_S(n)}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-n\cdot\dfrac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}\cdot\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{-1}{1} = -1\end{aligned}$$