Kapitola 7

Limita funkce

V této kapitole budeme studovat pojem limita funkce, který lze zařadit mezi základní pojmy matematiky, speciálně pak matematické analýzy. Využití limity funkce je široké. Pomocí limity lze popsat různé fyzikální a chemické jevy - např. okamžitou rychlost automobilu, zamoření chemickou látkou, šíření nákazy. V ekonomii můžeme pomocí tohoto pojmu určit okamžité tempo růstu národního důchodu. Limitu funkce lze však také použít pro studium různých vlastností funkcí - určení sklonu grafu funkce v daném bodě, výpočet plošného obsahu nějakého obrazce.

Hlavním cílem této kapitoly bude zavést pojem limita funkce a uvést její základní vlastnosti,které se dají požít při výpočtu limit. Především se budeme soustředit na praktické výpočty limit různých funkcí.

7.1 Definice limity funkce.

V této kapitole si zobecníme dříve probraný pojem limita posloupnosti pro libovolné funkce.

Intuitivní představy o pojmu limita

Ještě před zavedením korektní definice si pro názornost ilustrujeme pojem limita na příkladu.

Příklad 7.1.1. Podíváme se, jakých hodnot nabývá funkce

$$f : y = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1},$$

jestliže se hodnoty nezávisle proměnné x přibližují k číslu 1. Přesto že číslo 1 nepatří do definičního oboru dané funkce, není pro odpověď na naši otázku podstatné. Nezajímá nás, jak se funkce chová přesně v bodě 1, ale pouze v blízkosti tohoto bodu. Základní přehled o hodnotách $f(x)$ si můžeme udělat pomocí následující tabulky, kdy se k hodnotě $x = 1$ blížíme zleva a zprava. Aby se nám počítalo snadněji, všimněme si, že pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ platí

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = 3x + 2$$

x	$0,8$	$0,9$	$0,95$	$0,99$	$0,999$	1	$1,001$	$1,01$	$1,05$	$1,1$
$f_1(x)$	$4,4$	$4,7$	$4,85$	$4,97$	$4,997$		$5,003$	$5,03$	$5,15$	$5,3$

Z tabulky je zřejmé, že funkční hodnoty $f(x)$ dosahují k číslu 5, pro x stále více se blížícímu k číslu 1 z libovolné strany. Toto chování popisujeme slovy *limita funkce f pro x jdoucí k 1 je 5* a zkráceně píšeme

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = 3x + 2 = 5.$$

Konečná limita funkce

Při intuitivním popisu limity funkce v bodě jsme používali představu blízkých bodů. Tuto představu je však třeba upřesnit. Blízkost dvou libovolných bodů $x \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$ lze posuzovat pomocí jejich vzdálenosti $|x - a|$.

Chceme-li říci, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$, je třeba ukázat, že k tomu, aby byla vzdálenost $|f(x) - A|$ libovolně malá, stačí nalézt body $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - a|$ je dostatečně malé. Na hodnotě funkce f v bodě a vůbec nezáleží - může i nemusí existovat, nezajímá nás to.

Definice 7.1.1 (Konečná limita v reálném bodě)**.** *Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$* právě tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jestliže $0 < |x - a| < \delta$.

Poznámka 7.1.1. Předchozí definici lze zapsat symbolicky ve tvaru

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Jako ukázku použití této definice uvedeme následující příklad.

Příklad.

Příklad 7.1.2. Uvažujme funkci $f : y = 2x + 3$ a zabývejme se otázkou, jak se tato funkce chová pro x jdoucí k 1.

***Řešení:* 7.1.1.** Pomocí výpočtu několika hodnot usoudíme, že $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = 5$. Podle definice je nyní třeba nalézt vztah mezi vzdálenostmi $|x - 1|$ a $|f(x) - 5|$: Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$, pak

$$|f(x) - 5| = |2x + 3 - 5| = 2|x - 1| < \varepsilon,$$

jestliže $|x - 1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$

Vzhledem k tomu, že se v tomto textu zaměříme především na výpočet limit, formulujeme následující větu, která výpočty limit umožní.

Věta 7.1.1 (O aritmetických operacích s limitami)**.** *Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$, pak*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B,$
2. $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = A.B,$
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$*, je-li* $B \neq 0$.

Poznámka 7.1.2. Slovně lze tvrzení věty **??** stručně formulovat takto:

1. *pravidlo součtu:* limita součtu funkcí je rovna součtu limit těchto funkcí,
2. *pravidlo součinu:* limita součinu funkcí je rovna součinu limit těchto funkcí,
3. *pravidlo podílu:* limita podílu funkcí je rovna podílu limit těchto funkcí, pokud je podíl definován.

Příklad

Příklad 7.1.3. Určíme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + x + 1}\cdot$$

***Řešení:* 7.1.2.** Protože $\lim_{x\to 1} x = 1$, platí podle pravidla součinu $\lim_{x\to 1} x^2 = \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x = 1 \cdot 1 = 1$. Podobně lze získat $\lim_{x\to 1} x^3 = 1$. Pro konstantní funkci $y = k$ platí $\lim_{x\to 1} k = k$. Podle pravidla součtu tedy platí $\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x + 1) = 5$ a $\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1) = 3$. Nakonec podle pravidla podílu tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + x + 1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x + 1)}{\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1)} = \frac{5}{3}.$$

🕮 Limita složené funkce

Další věta, která je při výpočtu limit funkcí užitečná se týká složených funkcí. Uvedeme ji v následujícím tvaru.

Věta 7.1.2 (O limitě složené funkce). *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$ a $f(x) \neq A$ pro x dostatečně blízká k a taková, že $x \neq a$, pak*

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = B.$$

Příklad 7.1.4. Vypočítáme limitu

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}.$$

***Řešení:* 7.1.3.** Je $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = 1/2$, takže $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin^2 x = 1/4$ a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin^2 x + \sin x - 1) = 0$. Podobně zjistíme, že $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin^2 x - 3\sin x + 1) = 0$. Zlomek $0/0$ není definován, takže pro výpočet limity zadané funkce nelze použít pravidlo podílu. Uvažujme však vnitřní funkci $f : y = \sin x$, pro kterou platí $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = 1/2$ a vnější funkci $g : z = (2y^2 + y - 1)/(2y^2 - 3y + 1)$, pro kterou podle předchozí úvahy platí

$$\lim_{y\to\frac{1}{2}} g(y) = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{2y^2 + y - 1}{2y^2 - 3y + 1} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y+1)}{2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y-1)} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{y+1}{y-1} = \frac{\lim\limits_{y\to\frac{1}{2}}(y+1)}{\lim\limits_{y\to\frac{1}{2}}(y-1)} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3.$$

Protože pro x blízká $\pi/6$ a $x \neq \pi/6$ je $f(x) = \sin x \neq 1/2$, můžeme použít větu o limitě složené funkce a získáme

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{2y^2 + y - 1}{2y^2 - 3y + 1} = -3.$$

🕮 Jednostranné limity

Vzhledem k tomu, že je často třeba rozlišit, zda se zajímáme o hodnoty funkce f v blízkosti bodu $a \in \mathbb{R}$ pro $x > a$, resp. $x < a$, je potřebné zavést další nové pojmy.

Definice 7.1.2 (Jednostranné konečné limity v reálném bodě). *Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$ zprava* právě tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jestliže $a < x < a + \delta$.

Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$ zleva právě tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jestliže $a - \delta < x < a$.

Poznámka 7.1.3. Předchozí definice lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (0 < x < a + \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon),$$
$$\lim_{x\to a-} f(x) = A \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (a - \delta < x < a \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

🕮 Nekonečná limita

Definice 7.1.3 (Nekonečná limita v reálném bodě). *Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $+\infty$* právě tehdy, když k libovolnému reálnému číslu K, $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) > K$, jestliže $0 < |x - a| < \delta$.

Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $-\infty$ právě tehdy, když k libovolnému reálnému číslu L, $L < 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) < L$, jestliže $0 < |x - a| < \delta$.

Poznámka 7.1.4. Předchozí definici lze zapsat symbolicky ve tvaru

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \stackrel{def}{\iff} \forall K > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > K.$$

Analogicky můžeme psát

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \stackrel{def}{\iff} \forall L < 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : (0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) < L.$$

Příklad 7.1.5. (Typ $\dfrac{1}{0+}$·) Ukážeme, že $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

***Řešení:* 7.1.4.** Podle definice je třeba ke každému reálnému číslu K, $K > 0$ nalézt $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ platí

$$\frac{1}{x^2} > K.$$

Položme $\delta = 1/\sqrt{K}$, pak pro $x \in \mathbb{R}$, pro která $0 < |x| < \delta$, platí $x^2 < 1/K$ a jsme hotovi. Zkráceně budeme o limitách tohoto typu s tímto výsledkem mluvit jako o limitách typu $1/0+$.

Příklad 7.1.6. (Typ $\dfrac{1}{0-}$·) Ukážeme, že $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 - e^{|x|}} = -\infty$.

***Řešení:* 7.1.5.** Podle definice je třeba ke každému $L < 0$ nalézt $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ platí

$$\frac{1}{1 - e^{|x|}} < L.$$

Položme

$$\delta = \ln\left(1 - \frac{1}{L}\right),$$

pak platí

$$\begin{gathered} 0 < |x| < \delta \\ |x| < \ln\left(1 - \frac{1}{L}\right) \\ e^{|x|} < 1 - \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} < 1 - e^{|x|} \\ \frac{1}{1 - e^{|x|}} < L. \end{gathered}$$

To však bylo třeba ukázat. Zkráceně budeme o limitách tohoto typu s tímto výsledkem mluvit jako o limitách typu $1/0-$.

K tomu, abychom mohli počítat i s nekonečnými limitami, je účelné zavést následující vztahy:

- *Je-li* $A \in \mathbb{R}$, *pak*

  $$A \pm \infty = \pm\infty,\ +\infty + \infty = +\infty,\ -\infty - \infty = -\infty.$$

  Nedefinujeme výraz typu

  $$+\infty - \infty,\ \textit{resp.}\ -\infty + \infty.$$

- *Pro libovolná $A > 0$ nebo $A = +\infty$ a $B < 0$ nebo $B = -\infty$ definujeme*

$$\pm\infty \cdot A = \pm\infty, \ \pm\infty \cdot B = \mp\infty.$$

Nedefinujeme výraz typu

$$0 \cdot \pm\infty.$$

- *Je-li $A \in \mathbb{R}$, definujeme*

$$\frac{A}{\pm\infty} = 0.$$

Nedefinujeme výrazy typu

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}.$$

Zlomek typu

$$\frac{A}{0}$$

se obecně nedefinuje, nicméně pro $A \neq 0$ lze pro hodnotu limity podílu symbolicky psát

$$\left|\frac{A}{0}\right| = +\infty,$$

viz příklady uvedené v závěru kapitoly.

Příklady

*Pro výpočet limit jsme dosud používali větu **??**. Vezmeme-li v úvahu definované vztahy pro symboly $+\infty$ a $-\infty$, lze ukázat, že podobná věta o aritmetice limit platí i pro nekonečné limity. Ukážeme to na několika příkladech.*

Příklad 7.1.7. Vypočítáme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3+4x}{x^2}$.

***Řešení:* 7.1.6.** Nejdříve si všimněme, že zlomek $0/0$ není definován, provedeme tedy úpravy výrazu tak, abychom mohli použít větu o algebře limit a případně vztahy definované pro nekonečno. Pro $x \neq 0$ platí

$$\frac{2x^3 + 4x}{x^2} = \frac{2x^2 + 4}{x}.$$

Nyní můžeme použít pravidlo podílu a psát

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + 4}{x} = \infty,$$

protože $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2 + 4) = 4$, $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ a jedná se o typ $1/0+$.

Limita v nekonečnu

Definice 7.1.4 (Konečná limita v nekonečnu). *Funkce f má v bodě $+\infty$ limitu $A \in \mathbb{R}$* právě tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $k > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jestliže $x > k$.

Funkce f má v bodě $-\infty$ limitu $A \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $l < 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$, jestliže $x < l$.

Poznámka 7.1.5. Předchozí definici lze zapsat symbolicky ve tvaru

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0 \ \exists k > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : (x > k \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

a analogicky

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0 \ \exists l < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : (x < l \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

Poznámka 7.1.6. Podobným způsobem lze definovat nekonečnou limitu v nekonečnu, např.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \overset{def}{\iff} \forall K > 0\, \exists k > 0\, \forall x \in \mathbb{R} : (x > k \Longrightarrow f(x) > K).$$

Již jsme poznali, že práce se symboly $+\infty$ a $-\infty$ má svá specifika. V následujících příkladech si ukážeme, jak vypočítat některé typy limit.

Limity typu $(0/0)$ a (∞/∞)

Příklad 7.1.8. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$.

***Řešení:* 7.1.7.** Jedná se o limitu typu $(0/0)$ (čitatel i jmenovatel zlomku je po dosazení 2 roven 2). Zlomek $0/0$ není definován. Limitu můžeme zkrátit, dostáváme $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x+2$. Poslední limitu lze vypočíst dosazením a tak platí $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

Příklad 7.1.9. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

***Řešení:* 7.1.8.** Jedná se o limitu typu (∞/∞). Narozdíl od předcházejícího příkladu nelze zkrátit. V tomto případě můžeme postupovat, tak že ji upravíme na součet limit. Využijeme vlastností limity a vztahu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Budeme postupovat, tak že čitatele i jmenovatele podělíme x s největší mocninnou vyskytující se ve zlomku. Platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2-4x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{4}{x}} = \frac{2}{3}$.

Příklad 7.1.10. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

***Řešení:* 7.1.9.** Jedná se o limitu typu $(0/0)$. Limitu lze vypočíst pomocí rozšíření zlomku, úprava podle vzorce $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Tedy lze počítat následujícím způsobem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$.

Limity typu $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ pro $\alpha \to 0$.

Je-li úhel vyjádřen v radiánech, pak platí $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Této vlastnosti budeme využívat při výpočtu následujících limit.

Příklad 7.1.11. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{3}}{x}$.

***Řešení:* 7.1.10.** Tuto limitu lze snadno upravit tak, aby u funkce sinus v čitateli byl stejný argument jako je číslo vyskytující se ve jmenovateli $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}$.

Příklad 7.1.12. Zjistěte, zda existuje limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

***Řešení:* 7.1.11.** Upravíme na typovou limitu za pomocí vzorců pro počítání s goniometrickými funkcemi $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ a $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ (resp. z něj odvozeného $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$). Pro limitu platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{x} = \sqrt{2} \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}.$$

Vzhledem k tomu, že se nám při úpravě objevila absolutní hodnota, záleží na tom, zda se blížíme k nule zleva (od záporných čísel) nebo zprava (od kladných čísel). Pro limity zleva a zprava platí $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{|\sin x|}{x} = \sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = \sqrt{2}$ a
$\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x} = \sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{|\sin x|}{x} = \sqrt{2} \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{-\sin x}{x} = -\sqrt{2}$. Nejsou si rovny a přestože obě existují, limita neexistuje.

Limity typu $\infty - \infty$.

Příklad 7.1.13. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-4x}$.

***Řešení:* 7.1.12.** Pro $x \to -\infty$ jdou oba dva výrazy $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{x^2-4x}$ do ∞. Můžeme postupovat tak, že limitu rozšíříme a použijeme úpravu podle vzorce $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ a pak dále upravujeme. limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2-4x}\right) \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2-4x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+4}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = -2.$

Příklad 7.1.14. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x\right)$.

***Řešení:* 7.1.13.** Postupně upravujeme

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \tan^2 x\right) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} =) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{1}{2}.$$

Limity s číslem e.

Eulerovo číslo e se rovná následujícím limitám $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to-\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$

Příklad 7.1.15. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$.

***Řešení:* 7.1.14.** Limitu upravíme následujícím způsobem $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^{/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1}$.

Příklad 7.1.16. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

***Řešení:* 7.1.15.** Limitu upravíme následujícím způsobem $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{2x} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{2x}\right)^{-1} . \lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{-1} e^{-2}.$