Kapitola 8

Spojitost funkce

V následující kapitole se budeme zabývat tzv. spojitostí funkce a to, jak spojitostí v bodě, tak spojitostí na množině. S pojmem spojitosti se dále váží pojmy jako je okolí bodu, limita aj, se kterými jste se již v textu setkali. Po prostudování kapitoly bychom měli bez problémů definovat pojem spojitosti, určit zda je daná funkce spojitá, nespojitá prvního druhu resp. druhého druhu a v neposlední řadě uvést příklady takových funkcí.

Představme si případ, kdy známe funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$, kde $a \neq b$ – například počáteční a koncovou hodnotu průběhu nějakého experimentu. Nás ale kromě toho zajímá, jestli daný experiment probíhal kontinuálně, nebo nastaly skokové změny. Matematicky vyjádřeno, zda funkční hodnoty $f(x)$, pro $x \in \langle a, b\rangle$ nabývaly právě všech hodnot z intervalu $\langle f(a), f(b)\rangle$, nebo zde některé chybí či přebývají. Odpověď nám mohou poskytnout následující řádky.

Intuitivní představy o pojmu spojitost

Mezi funkcemi, se kterými jste se již ve skriptech setkali, mají mimořádný význam funkce, které nazýváme spojité. Intuitivně všichni cítíme, že spojité je něco nepřerušované. Na školách se někdy uvádí, že graf spojité funkce lze nakreslit jedním tahem. Taková interpretace pojmu spojitost ovšem naráží na mnoho problémů. Tím největším je schopnost vytvořit si správný geometrický názor. Jen velmi těžko bychom mohli pomocí takové "definice"ukázat, že například funkce $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 11x + 12$ je spojitá funkce, i když tomu tak doopravdy je. Je nezbytné, abychom mohli o funkci prohlásit, zda je či není spojitá i bez znalosti jejího grafu. Je velkým úspěchem matematického myšlení, že byl pojem spojitost vyjádřen naprosto exaktně.

Než přistoupíme k samotné definici pojmu spojitost, ukažme si několik funkcí:

Příklad 8.0.17. Mějme funkce:

1. $f : y = x + 3, x \in \mathbb{R}$
2. $g : y = \dfrac{x^3 - 3x}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
3. $h : y = \dfrac{1}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Graf funkce f je přímka , grafem funkce g je parabola kromě jejího minima v bodě $[0, -3]$ a konečně grafem funkce h jsou dvě větve hyperboly (nepřímá úměrnost). Pokud bychom si grafy představili jako cesty, po cestě f bychom přešli bez větších problémů, na cestě g bychom museli překonat jednu překážku a to "díru"po bodě $[0, -3]$, ovšem cestu h bychom nikomu nedoporučovali, neboť pokud by vyšel na jedné její části, nikdy by se nedostal na druhou. Kterou cestu si vybrat a kterou nikoliv nám objasní již známý pojem limita.

8.1 Spojitost funkce v bodě

Spojitost funkce v bodě odpovídá názorné představě, že "velmi malé"změně hodnoty proměnné z definičního oboru odpovídá "velmi malá"změna funkčních hodnot. Vyslovme přesnou definici.

Definice 8.1.1. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě a, jestliže $a \in D(f)$ a k libovolnému okolí $U(f(a))$ bodu $f(a)$ existuje okolí $V(a)$ bodu a tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in V(a) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \in U(f(a)).$$

Vyslovme ještě ekvivalentní definici, která využívá známého pojmu limita.

Definice 8.1.2. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě $a \in \mathbb{R}$ takovém, že f je definovaná v jeho okolí, právě když existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

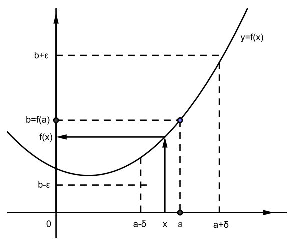
Druhá definice v sobě obsahuje hned tři podmínky, které budeme v dalším textu využívat.

1. *funkce f musí být v bodě a definována (na rozdíl od limity),*
2. *musí existovat limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, tedy musí existovat jednostranné limity a musí si být rovny,*
3. *limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ musí být rovna funkční hodnotě v bodě a.*

V některých publikacích je možné najít další ekvivalentní definici. Pro úplnost ji zde uvedeme také.

Definice 8.1.3. Říkáme, že funkce f je *spojitá* v bodě $a \in D(f)$ a platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D(f) : |x - a| < \delta \Rightarrow \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Obrázek 8.1: Spojitost funkce v bodě

My se budeme v dalším opírat především o definici využívající pojmu limita.

8.1.1 Základní vlastnosti

Z vět o limitách funkcí plynou snadno některé věty o vlastnostech spojitých funkcí v bodě.

Věta 8.1.1. *(**O vlastnostech spojitosti**) Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *f je spojitá v bodě a, právě tehdy, když je v a spojitá zleva i zprava.*
2. *Jestliže je f spojitá v a, pak existuje $U(a)$ takové, že f je omezená na $U(a)$.*
3. *Jestliže jsou f, g spojité v a, pak $f + g, f - g, cf, fg, |f|$ jsou také spojité, a je-li $g(a) \neq 0$, je spojitá v bodě a také $\dfrac{f}{g}$.*
4. *Jestliže je f spojitá v a a zároveň g spojitá v $A = f(a)$, pak je také složená funkce $g \circ f$ spojitá v bodě a.*

Věta 8.1.2. *(**O spojitosti elementárních funkcí**) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \in D(f)$ je elementární funkce. Pak v každém bodě $x \in D(f)$ je f spojitá.*

8.2 Jednostranná spojitost a body nespojitosti

Mějme funkci $f : A \to \mathbb{R}$*. Jestliže v jistém levém, resp. pravém okolí bodu* a *není funkce* f *definována, pak mluvím zpravidla o* jednostranné spojitosti *v bodě* a zprava, resp. zleva. *Například funkce* $f : y = \sqrt{x}$ *jde v bodě* 0 *o spojitost zprava (funkce není definována pro* $x < 0$*). Pojem jednostranné spojitosti však zavádíme i v případě, že máme definováno okolí bodu* a *zprava i zleva.*

Definice 8.2.1. Říkáme, že funkce $f : A \to \mathbb{R}$ je *spojitá zprava (zleva)* v bodě $a \in A$, jestliže platí:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

Body definičního oboru funkce f*, v nichž není funkce spojitá, nazýváme body* nespojitosti *funkce* f*. Tyto body můžeme roztřídit do tří skupin.*

1. *Existuje konečná limita*

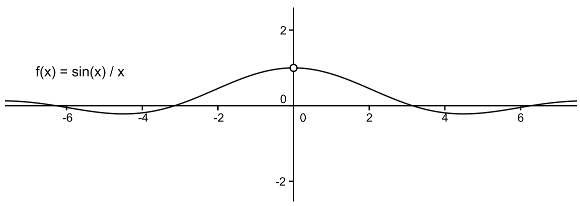
$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \text{ale} \quad b \neq f(a).$$

Takový bod nazveme bodem odstranitelné nespojitosti, *protože stačí funkci* f *v bodě a předefinovat tak, že položíme* $f(a) = b$ *a funkce se stane spojitou. K bodům odstranitelné nespojitosti patří také body, v nichž je funkce* f *nedefinovaná, ale existuje v něm limita*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

V takovém případě postačí funkci f *v bodě* a *dodefinovat tak, že položíme* $f(a) = b$*. Funkci* f *tak rozšíříme na* $D(f) \cup \{a\}$*.*

Příklad 8.2.1. Funkce $f(x) = \dfrac{2\sin x}{x}$ není definována v bodě $x = 0$. Vyzkoušíme tedy jednostranné limity: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sinx}{x} = 1$. Jedná se tedy o odstranitelnou nespojitost, stačí dodefinovat $f(0) = 1$ a funkce bude spojitá v oboru reálných čísel.



Obrázek 8.2: Graf funkce $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

2. *Existují konečné jednostranné limity, ale nejsou si rovny.*

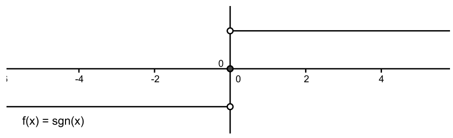
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x).$$

V tomto případě nazveme bod a nespojitostí prvního druhu *a číslo*

$$s(a) = \left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right|$$

nazýváme skokem funkce v bodě a.

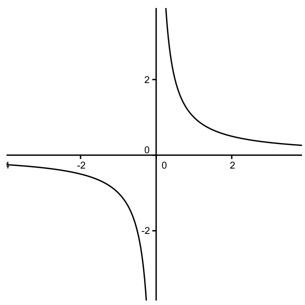
Příklad 8.2.2. Funkce $f(x) = sgnx$ má v bodě 0 nespojitost prvního druhu. Tvrzení nám dokáží hodnoty jednostranných limit: $\lim\limits_{x\to 0^+} sgnx = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0^-} sgnx = -1$. $\quad s(0) = |1 - (-1)| = 2$



Obrázek 8.3: Graf funkce $f(x) = sgn x$

3. *Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje nebo je nevlastní* ($\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$), *pak bod* a *nazveme bodem* nespojitosti druhého druhu.

Příklad 8.2.3. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ má v bodě 0 nespojitost druhého druhu. Tvrzení nám dokáží opět jednostranné limity: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$, resp. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



Obrázek 8.4: Graf funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Příklad 8.2.4. Určete body nespojitosti funkce $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ a klasifikujte je.

Řešení: **8.2.4.** Body nespojitosti zjistíme velmi jednoduše. Jsou to kořeny jmenovatele zlomku, tedy $-1, 0, 1$. Nyní vypočítáme jednostranné limity pro všechny body nespojitosti.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x(x^2-1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x(x^2-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x(x^2-1)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(x^2-1)} = -\infty$$

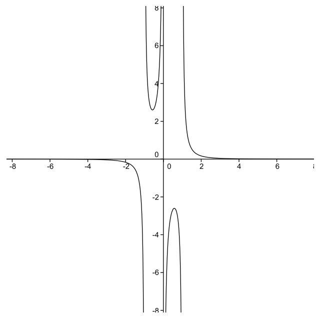
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x(x^2-1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x(x^2-1)} = +\infty$$

Všechny tři body můžeme klasifikovat jako body nespojitost druhého druhu. Pro představu uvádíme i graf této funkce.

♣

Příklad 8.2.5. Určete body nespojitosti funkce $g(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{je-li} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 0 & \text{je-li} \quad x = 0 \\ -x^2-2, & \text{je-li} \quad x \in (0, \infty). \end{cases}$

a klasifikujte je.



Obrázek 8.5: Graf funkce $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

Řešení: **8.2.5.** Uvedená funkce je nespojitá pouze pro $x = 0$. Podívejme se na jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 2 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} g(x) = -2.$$

Navíc $g(0) = 0$.
Jednostranné limity sice existují, ale nejsou si rovny, jde tedy o nespojitost prvního druhu. ♣

Příklad 8.2.6. Určete body nespojitosti funkce $h(x) = \begin{cases} x^2+5, & \text{je-li} \quad x \in (-\infty, 0) \\ 2 & \text{je-li} \quad x = 0 \\ -x^2+5, & \text{je-li} \quad x \in (0, \infty). \end{cases}$
a klasifikujte je.

Řešení: **8.2.6.** Uvedená funkce je nespojitá opět pro $x = 0$. Podívejme se na jednostranné limity.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = 5 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^+} h(x) = 5.$$

Navíc $h(0) = 2$.
Jednostranné limity existují, jsou si rovny, ale nejsou rovny funkční hodnotě v bodě $x = 0$, jde tedy o odstranitelnou nespojitost. ♣

8.3 Spojitost funkce na množině

Od spojitosti funkce v bodě nyní přejdeme ke spojitosti funkce na intervalu, jakožto velmi hluboké vlastnosti funkcí. Z hlediska využití vlastností funkcí hrají významnou roli právě funkce spojité na daném intervalu. Znalosti o spojitých funkcích nám umožňují například řešit nerovnice, případně přibližně řešit rovnice. Ačkoliv si to mnozí neuvědomují, využívají vlastnosti spojitých funkcí již od základní školy. Než přejdeme k vyslovení nejdůležitějších vět, specifikujme dva základní pojmy.

Definice 8.3.1. *Funkce je spojitá na otevřeném intervalu* (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

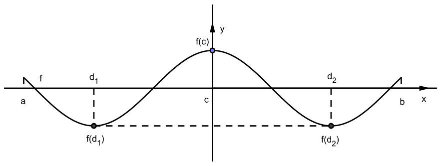
Definice 8.3.2. *Funkce je spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v (a, b) a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta 8.3.1. *(Weierstrassova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí:*

1. *Funkce f je na tomto intervalu omezená.*

2. *Funkce f nabývá na tomto intervalu své největší a nejmenší hodnoty, tj. existují $c, d \in \langle a, b\rangle$ takové, že $f(c) = \max\limits_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x)$, resp. $f(d) = \min\limits_{x\in\langle a,\, b\rangle} f(x)$ (viz obr.* ***??****).*

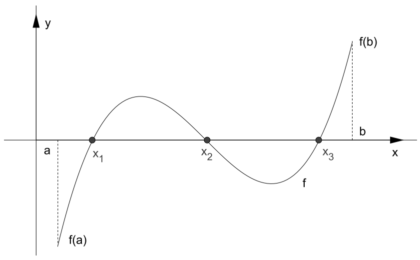
Druhé tvrzení věty Weierstrassovy je existenční, které nám dává jistotu, že má smysl hledat maxima a minima. Neříká však nic o tom, jak dané body nalezneme.



Obrázek 8.6: Ilustrace Weierstrassovy věty.

Věta 8.3.2. *(Bolzanova - Weierstrassova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, pak funkce f nabývá na intervalu (a, b) všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$. Jinými slovy platí, že pro libovolné číslo $y \in (f(a), f(b))$ existuje číslo $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$.*

Věta 8.3.3. *(Bolzanova věta) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že platí $f(a)\cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $x \in (a, b)$ pro nějž platí $f(x) = 0$ (viz obr. **??**).*



Obrázek 8.7: Ilustrace Bolzanovy věty.

Poznámka 8.3.1. Bolzanova věta je přímým důsledkem věty Bolzano - Weierstrassovy a zajišťuje nám při splnění uvedených podmínek existenci nulového bodu. Jde o postačující podmínku, tedy pokud není splněna, nemůžeme s jistotou říci, že nulové body funkce neexistují (viz následující příklad).

Příklad 8.3.1. Zjistěte, zda následující funkce mají v intervalu $\langle -2, 2\rangle$ nulový bod.

1. $f : y = x^3 - x$
2. $g : y = x^2 - 1$

***Řešení:* 8.3.1.**

1. Vypočítejme hodnoty funkce v krajních bodech: $f(-2) = -6$ a $f(2) = 6$, tedy $f(-2) \cdot f(2) = -36 < 0$ a podle Bolzanovy věty musí existovat alespoň jeden nulový bod x. Velmi jednoduchou úpravou zjistíme, že hledané reálné nulové body jsou dokonce tři ($f : y = x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$, pro $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$).
2. Vypočítejme hodnoty funkce v krajních bodech: $g(-2) = 3$ a $g(2) = 3$, tedy $g(-2) \cdot g(2) = 3 > 0$ a Bolzanova věta nám nic neřekne. Přesto je zřejmé, že grafem funkce g je parabola s vrcholem (minimem) v bodě $[0, -1]$. Musí tedy protínat osu o_x ve dvou bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$, které patří do našeho intervalu. ♣

*Uvedený příklad po nás požadoval pouze důkaz existence nulového bodu. Většinou ale potřebujeme nejen vědět, že nulový bod existuje, ale je nutné znát i jeho číselnou hodnotu, byť jen přibližnou. Popíšeme si nyní postup, kterým lze číselnou hodnotu nulového bodu nalézt. Tento postup se nazývá **metoda půlení intervalu - bisekce**.*
Nechť jsou splněny podmínky Bolzanovy věty na intervalu $\langle a, b\rangle$. Vezmeme nyní prostřední bod tohoto intervalu $c = \dfrac{a+b}{2}$ a určíme jeho funkční hodnotu $f(c)$. Pokud $f(c) = 0$, našli jsme nulový bod. Pokud ne, nahradíme

interval $\langle a, b\rangle$ intervalem $\langle a, c\rangle$ nebo $\langle c, b\rangle$ podle toho, pro který budou splněny podmínky Bolzanovy věty. Postup budeme opakovat do té doby, dokud nenalezneme přesnou hodnotu nulového bodu, nebo pokud délka intervalu nebude menší než námi předem stanovená přesnost.

Poznámka 8.3.2. Samozřejmě není nutné intervaly pouze půlit. Lze volit c v libovolném poměru délek příslušných intervalů, pro něž postup k nalezení nulového bodu bude rychlejší. My jsme volili postup, který lze jednoduše popsat.

Příklad 8.3.2. Najděte nulový bod funkce $f(x) = x^3-x-1$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$ s přesností na desetitisíciny.

***Řešení:* 8.3.2.** Použijeme právě popsanou metodu bisekce. Výsledky našich propočtů budeme zapisovat do přehledné tabulky.

a	b	$c = \dfrac{a+b}{2}$	$f(c)$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{2}$
1	2	$1,5$	$0,875$	$0,5$
1	$1,5$	$1,25$	$-0,2969$	$0,25$
$1,25$	$1,5$	$1,375$	$0,2246$	$0,125$
$1,25$	$1,375$	$1,3125$	$-0,0515$	$0,0625$
$1,3125$	$1,375$	$1,3438$	$0,0828$	$0,0313$
$1,3125$	$1,3438$	$1,3282$	$0,0149$	$0,0157$
$1,3125$	$1,3282$	$1,3204$	$-0,0183$	$0,0079$
$1,3204$	$1,3282$	$1,3243$	$-0,0018$	$0,0039$
$1,3243$	$1,3282$	$1,3263$	$0,0068$	$0,002$
$1,3243$	$1,3263$	$1,3253$	$0,0025$	$0,001$
$1,3243$	$1,3253$	$1,3248$		$0,0005$

Přibližný výsledek je tedy $1,3248$ s chybou 0.0005. ♣

Věta 8.3.4. *(O hodnotách spojité funkce) Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu (a, b) a v (a, b) nemá žádné nulové body, pak buď $\forall x \in (a, b)$ je $f(x) > 0$ nebo $\forall x \in (a, b)$ je $f(x) < 0$.*

Příklad 8.3.3. Na množině reálných čísel řešme nerovnici $(x^2 - 1)(x^2 - 9) > 0$.

***Řešení:* 8.3.3.** Úlohy tohoto typu jsou nám již důvěrně známé a setkávali jsme se nimi od základní školy. Je ovšem důležité si uvědomit, že naše řešení je založeno na vlastnosti spojité funkce na množině a znalosti předchozí věty.
Uvažujme funkci $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$. Nejprve najdeme nulové body funkce f, zřejmě půjde o čísla $-3, -1, 1, 3$. Na základě spojitosti funkce f, můžeme využít tvrzení předchozí věty tak, že rozdělíme definiční obor funkce na disjunktní intervaly $(-\infty, -3), (-3, -1), (-1, 1), (1, 3), (3, \infty)$. V těchto intervalech je funkce spojitá a neobsahuje žádné další nulové body, musí tedy v jednotlivých intervalech nabývat buď jen kladných hodnot nebo jen záporných hodnot. K tomu, abychom určili znaménko hodnot v jednotlivých intervalech, tedy stačí vybrat si libovolný bod intervalu a všechny ostatní body budou nabývat hodnot se stejným znaménkem. např. z intervalu $(1, 3)$ vybereme bod $x = 2$. Platí $f(2) = -15 < 0$ a funkce je na tomto intervalu záporná. Výsledky zapíšeme do přehledné tabulky:

$x \in$	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

Věta 8.3.5. *(O spojitosti inverzní funkce) Nechť funkce f je spojitá a ryze monotónní na intervalu I. Pak f^{-1} je spojitá na $f(I)$.*