Kapitola 9

Derivace funkce

Vedle pojmu limity, o které již byla zmínka, patří mezi základní stavební prvky diferenciálního a integrálního počtu pojem derivace. Pomocí ní lze například elegantním způsobem vyšetřovat průběh funkce, hledat extrémní hodnoty, či okamžitou rychlost změny dané veličiny. Velký význam derivace oceníme také ve fyzice nebo geometrii. Diferenciální počet zavedli téměř současně anglický fyzik a matematik Isaac Newton a německý filosof a matematik Gottfried Wilhelm Leibniz.

Hlavním cílem této kapitoly bude zavést pojem derivace a s ním související používanou symboliku. Ukážeme zde pravidla a techniky výpočtu derivací počínaje elementárními funkcemi a konče derivací funkce složené. Ukážeme si dále praktický význam derivace a její nenahraditelnou funkci při řešení matematických a praktických problémů. Po prostudování kapitoly byste měli být schopni vypočítat derivaci každé elementární funkce.

9.1 Derivace funkce v bodě

Rychlost, tečna

K zavedení pojmu derivace vedly především úlohy typu stanovit okamžitou rychlost přímočarého pohybu hmotného bodu, či napsat rovnici tečny ke grafu libovolné reálné funkce v daném bodě.

Úloha o rychlosti

Naším úkolem je zjistit okamžitou rychlost auta. Předpokládejme pohyb auta po přímé dráze

$$s = f(t) \tag{9.1}$$

*v závislosti na čase t (viz obrázek **??**). Označme Δs přírůstek dráhy s za dobu Δt od okamžiku spuštění stopek t_0 do okamžiku $t_0 + \Delta t$. Potom*

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0). \tag{9.2}$$

Obrázek 9.1: Isaac Newton

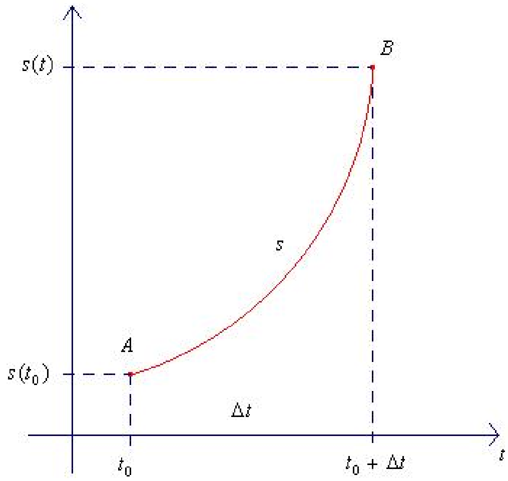
Obrázek 9.2: Gottfried Wilhelm Leibniz

Podíl

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \tag{9.3}$$

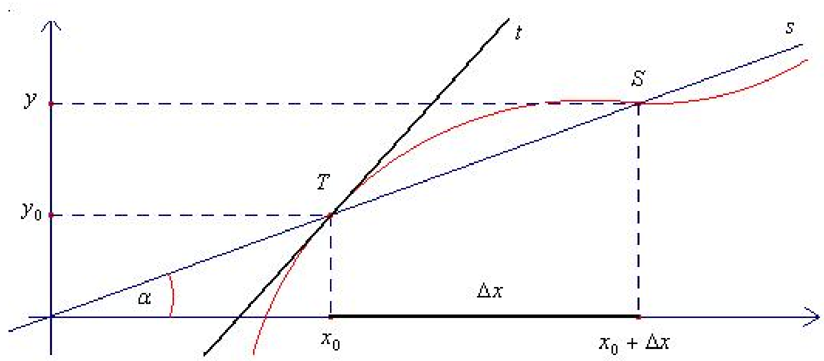
značí průměrnou rychlost pohybu auta v časovém úseku od t_0 do $t_0 + \Delta t$. Budeme-li dále neomezeně zmenšovat Δt až k 0, přejde průměrná rychlost v na okamžitou rychlost v_0. Je tedy

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \tag{9.4}$$



Obrázek 9.3: Graf funkce $s = s(t)$.

Poznámka 9.1.1. Předchozí úloha vedla na výpočet okamžité rychlosti. Nemusíme se ovšem omezovat pouze na pohyb bodu (auta). Rychlost můžeme chápat také jako tempo změny (růstu) obecně libovolné veličiny závislé na čase, takže můžeme sledovat například tempo růstu důchodů v ČR, rychlost růstu cen určité komodity či tempo klesání státního deficitu. Jestliže například $s = s(t)$ znamená počet obyvatel určité oblasti v čase t měřeném v rocích, pak rychlost růstu počtu obyvatel (nebo rychlost klesání, obecně míra změny) bude také určena předchozím způsobem a lze ji vyjádřit mírou nebo jednotkou analogickou k jednotce rychlosti pohybu nějakého objektu: počet obyvatel za rok, nebo obecněji počet obyvatel za časovou jednotku. Klíčem ke stanovení tempa změny bude určení strmosti stoupání nebo klesání grafu příslušné funkce; změříme to pomocí strmosti tečny ke grafu funkce, tudíž pomocí směrnice takové tečny. To bude obsahem našich dalších úvah.



Obrázek 9.4: Tečna ke grafu funkce.

Úloha o tečně

Máme za úkol najít rovnici tečny v bodě $T[x_0,\ f(x_0)]$ ke grafu spojité funkce $y = f(x)$ (viz obrázek **??**).

Rovnici tečny jako rovnici přímky lze určit například ve směrnicovém tvaru pomocí bodu, u nás T, a její směrnicí $k_t = tg\,\alpha$. Nyní se nabízí otázka, jak takovou směrnici najít. Zvolme si na grafu funkce libovolný bod $S[x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x)]$ pro $\Delta x \neq 0$ poblíž bodu T $(S \neq T)$. Pak přímka TS je jistě sečnou grafu funkce, označme ji jako s, a její směrnici označme k_s; bude $k_s = tg\,\beta$.

Co by se stalo, kdybychom bod S stále přibližovali po grafu funkce k bodu T? Určitě by se měnila směrnice sečny, až by v limitním případě, kdy by vzdálenost Δx mezi body T a S byla libovolně malá, sečna by přecházela v tečnu t, a pro směrnici k_t této tečny bude $k_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_s$. (Oba body by prakticky splynuly v jeden a vytvořili bychom přímku, která má s daným grafem společný právě jeden bod, tedy tečnu.) V jazyce matematiky bude naše úvaha vypadat následovně:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{9.5}$$

Pokud $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k_t$ existuje a je konečná, je úloha o určení tečny t ke grafu funkce $y = f(x)$ v daném bodě $T[x_0,\ f(x_0]$ vyřešena: hledaná rovnice tečny t ve směrnicovém tvaru je

$$t:\ y - f(x_0) = k_t \cdot (x - x_0). \tag{9.6}$$

Pokud porovnáme vztahy **??** a **??**, zjistíme, že až na označení neznámých jsou naprosto totožné. Tedy po matematické stránce tyto dvě úlohy vedou na problém určení stejné limity a vzhledem k její důležitosti dostala tato limita speciální název *derivace funkce v bodě*. Velmi často se v jejím výpočtu využívá také substituce v limitě: klademe $x = x_0 + h$, tedy $h = x - x_0$ (neboli přírůstek Δx pro x bude nyní označen jako h). Pak vztah pro směrnici tečny dostává tvar:

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{9.7}$$

A nyní již můžeme přistoupit k definici derivace funkce v bodě.

Definice 9.1.1. Říkáme, že *funkce má v bodě $x_0 \in D(f)$ derivaci*, je-li definovaná v okolí bodu x_0 a existuje-li limita $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Tuto limitu nazýváme *derivací funkce f v bodě* x_0 a značíme ji $f'(x_0)$ nebo

$\dfrac{dy}{dx}$ (označení zavedené G.W.Leibnizem, jehož výhodu si vysvětlíme později). Proto

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{9.8}$$

Poznámka 9.1.2. Definice tedy připouští také nevlastní limity. Pokud určujeme rovnici tečny grafu dané funkce v daném bodě, musíme se na základě definice směrnice přímky omezit na konečnou limitu.

Výpočet derivace funkce pomocí definice

Příklad 9.1.1. Pomocí definice najděme derivaci funkce $f : f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

***Řešení:* 9.1.1.** Počítáme podle definice:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6. \ \clubsuit$$

Poznamenejme, že operace krácení nebo dělení zlomku $\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}$ reálným číslem h neznamená dělení nulou, což by byl nepřípustný krok: toto dělení vystupuje pod znakem limity $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9+6h+h^2-9}{h}$ a o čísle h se na základě definice limity předpokládá (viz kapitolu o limitách funkcí), že se sice neomezeně přibližuje k nule, nicméně pokaždé je různé od nuly: $h \neq 0$. Proto lze korektně psát

$$\lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h).$$

Tuto argumentaci ”o krácení v limitě”uvedenou v kapitole o limitách lze uplatnit také v jiných příkladech.

Výpočet derivace funkce pomocí definice

Příklad 9.1.2. Pomocí definice najděme derivaci funkce $f : f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x \in D(f)$.

***Řešení:* 9.1.2.** Počítáme podle definice:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}};$$

čitatele a také jmenovatele zlomku jsme násobili stejným číslem, vztah rovnosti zůstává v platnosti; v čitateli pokračujeme roznásobením neboli úpravou na rozdíl čtverců. Po zrušení x a krácení h máme:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ \clubsuit$$

Výpočet derivace funkce pomocí definice

Příklad 9.1.3. Pomocí definice najděme derivaci funkce $f : f(x) = e^x$ v bodě x_0.

***Řešení:* 9.1.3.** Počítejme podle definice:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(e)^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}e^h - e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

♣

Poznámka 9.1.3. V posledním kroku jsme využili znalosti speciální limity $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

🕮 Geometrická interpretace derivace funkce v bodě

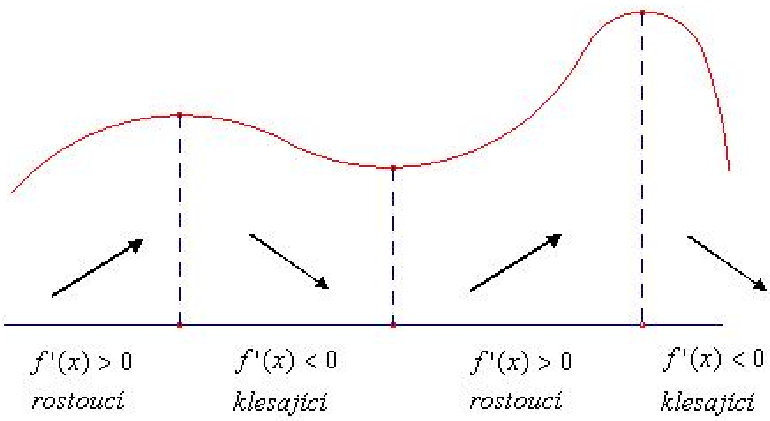
Na začátku kapitoly jsme hledali tečnu ke grafu funkce určené předpisem $y = f(x)$ v bodě $T[x_0, y_0]$ a dospěli jsme k závěru, že pro směrnici tečny platí vztah **??**, což je zároveň definice derivace funkce v bodě. Zopakujme, že lze tedy psát $k_t = f'(x_0)$ a konečně pro rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0,\, y_0]$ platí:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{9.9}$$

Z předchozích úvah plyne ještě jeden velmi důležitý poznatek. Jelikož derivace funkce v bodě je rovna směrnici tečny v tomto bodě, můžeme říci, že pokud je směrnice kladná, resp. záporná, je tečna v tomto bodě rostoucí, resp. klesající přímka (vždy se díváme zleva doprava) (obrázek **??**).

Bod dotyku je současně bodem grafu funkce, takže můžeme naši úvahu shrnout do následující věty.

Věta 9.1.1. *Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) kladnou, resp. zápornou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí, resp. klesající.*



Obrázek 9.5: Význam znaménka první derivace.

Po nastudování předchozích odstavců tedy teoreticky umíme najít tečnu ke grafu funkce v libovolném bodě. (Samozřejmě musí v tomto bodě existovat vlastní neboli konečná limita.) Dále umíme rozpoznat, ve kterých intervalech definičního oboru funkce klesá či roste. Zvládnutí rozpoznání takových vlastností funkcí je nezbytné pro úspěšné zvládnutí problému vyšetřit průběh funkce, což je stěžejní úloha diferenciálního počtu. Zbývá tedy převést teorii do praxe a vyzkoušet si řešení konkrétních úloh. Zatím umíme derivovat použitím definice derivace. Ponechme proto ukázkové příklady až na dobu, kdy nám derivace libovolné funkce nebude dělat problémy.

9.2 Derivace funkce na množině

Derivace jako nová funkce

Nechť je funkce f definována na množině $M \subset \mathbb{R}$. Označme M_1, $M_1 \subset M$ jako množinu všech čísel, v nichž má tato funkce derivaci, a předpokládejme $M_1 \neq \emptyset$. Potom můžeme na množině M_1 definovat funkci $g : M_1 \to \mathbb{R}$ vztahem $g(x) = f'(x)$ pro $x \in \mathrm{M}_1$.

Poznámka 9.2.1. Předchozí úvaha znamená, že z definičního oboru funkce f vybereme jen ty hodnoty x (a vytvoříme z nich množinu M_1), ve kterých existuje limita definující derivaci funkce v bodě x. Množina M_1 se tak stane definičním oborem nové *funkce* $g(x)$. Například funkce $f : y = |x|$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ nemá derivaci v bodě $x = 0$. Proto lze uvažovat o množině M_1, na které naopak existuje derivace funkce absolutní hodnota, jako $M_1 = \mathbb{R} - \{0\}$.

Funkci $g(x)$ pak nazveme *derivací funkce f na množině M_1* a značíme ji jako f' nebo $\dfrac{df}{dx}$.

Poznámka 9.2.2. Derivace funkce v bodě je tedy číslo, ale derivace funkce na množině je opět funkce. Její hodnoty jsou tvořeny jednotlivými hodnotami derivace původní funkce pro $x \in M_1$.

Poznámka 9.2.3. Uvědomme si, že derivace funkce v bodě je definována jako limita a tedy jako limita má všechny vlastnosti plynoucí z této definice; uvedli jsme je v předchozích kapitolách. Musí existovat také souvislost mezi existencí derivace funkce v bodě a spojitostí funkce v tomto bodě. Jde o analogickou souvislost, kterou jsme se zabývali u spojitosti funkce v bodě a existencí její limity v tomto bodě, ale derivace je také limita, proto tato otázka je na místě. Uveďme bez důkazu tvrzení:

Věta 9.2.1. *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Doposud jsme ukázali výpočet derivace funkce pomocí definice. Tabulka **??** uvádí vzorce pro derivace některých elementárních funkcí; tyto vzorce lze také odvodit na základě definice derivace jako limity.

Základní pravidla pro počítání derivací uvedeme formou věty. Důkazy jsou založeny na vlastnostech limit.

Věta 9.2.2. *Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i součet, rozdíl a součin funkcí $u(x)$, $v(x)$ a pro $v(x) \neq 0$ i podíl $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ a platí:*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{derivace součtu:} & (u+v)' = u' + v' \\
\textit{derivace rozdílu:} & (u-v)' = u' - v' \\
\textit{derivace součinu:} & (uv)' = u'v + uv' \\
\textit{derivace podílu} & \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \\
\textit{derivace speciálního podílu:} & \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}
\end{array}
\tag{9.10}
$$

Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu elementárních funkcí

Příklad 9.2.1. Následují ukázkové příklady: určeme derivaci funkce y v libovolném bodě jejího definičního oboru:

1. $y = 0,5x^2 - 5x + 6$ 2. $y = x^4 - x^2 + 1$ 3. $y = 6x^3 \cos x$
4. $y = x \ln x$ 5. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ 6. $y = x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

***Řešení:* 9.2.1.** 1. Použijeme pravidla z tabulky a pravidla pro derivace součtu (rozdílu), násobku. $y' = 0,5(2x^{2-1}) - 5(1) + 0 = x - 5.$

Funkce f	*Derivace f′*	*Podmínky platnosti*
c	0	$x \in (-\infty,\, \infty)$
x	1	$x \in (-\infty,\, \infty)$
x^n	nx^{n-1}	$x \in (-\infty,\, \infty),\, n \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \in (-\infty,\, 0) \cup (0,\, \infty)$
e^x	e^x	$x \in (-\infty,\, \infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in (-\infty,\, \infty), a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0,\, \infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0,\, \infty), a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in (-\infty,\, \infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in (-\infty,\, \infty)$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z$
$\mathrm{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in Z$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$x \in (-1,\, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	$x \in (-1,\, 1)$
arctg x	$\frac{1}{(1+x^2)}$	$x \in (-\infty,\, \infty)$

Tabulka 9.1: Derivace elementárních funkcí

2. $y' = 4x^{4-1} - 2x^{2-1} + 0 = 4x^3 - 2x$.

3. Tato funkce je součinem dvou elementárních funkcí $u = 6x^3$ a $v = \cos x$, proto využijeme vztahu pro derivaci součinu $(uv)'$. Abychom mohli dosadit do příslušného vztahu, vypočteme si nejprve u' a v'. Máme $u' = 18x^2$, $v' = -\sin x$ a po dosazení dostáváme:

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = 18x^2 \cos x + 6x^3(-\sin x).$$

4. Obdobně jako v předchozím příkladě použijeme vztah pro derivaci součinu, kde $u = x$, $v = \ln x$, $u' = 1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Pak $y' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

5. Již zadání příkladu napovídá, že se jedná o zlomek, musíme tedy použít vztahu pro derivaci podílu. Opět si označíme: čitatel $u = x^2$, $v = x - 1$. Pak budeme mít $u' = 2x$, $v' = 1$ a $v^2 = (x-1)^2$. Po dosazení dostaneme:

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x(x-1)) - (x^2 \cdot 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

6. Funkce v zadání je nyní součtem dvou členů, z nichž jeden je zlomek. Budeme derivovat součet, v něm na druhý aplikujeme vztah pro derivaci zlomku. Tedy:

$$y' = 2x - \frac{(0 \cdot x^3) - (1 \cdot 3x^2)}{x^6} = 2x - \frac{-3x^2}{x^6} = 2x + \frac{3}{x^4} \cdot \clubsuit$$

Derivace složené funkce

V praktických úlohách se samozřejmě nesetkáváme pouze s elementárními funkcemi, nýbrž se zde objevuje složitější argument, či několik funkcí složených do sebe. Existují další pravidla pro derivace funkcí utvořených právě tímto způsobem; uvádí je následující věta.

Věta 9.2.3. *Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(f(g(x)))'_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{9.11}$$

Poznámka 9.2.4. Možná, že předchozí tvrzení způsobí najednou zmatek. Víme však, že každá složená funkce je vytvořena pomocí několika funkcí, které jsou vloženy postupně jedna do další - složenou funkci tedy tvoří konečný řetězec funkcí začínající vnitřní funkcí až po tu poslední, vnější funkci. Z této struktury složené funkce vyplývá postup při jejím derivování, který je obsahem tvrzení předchozí věty: nejprve vezmeme vnější funkci, tu derivujeme jako funkci jednoduchého argumentu, a pak pokračujeme násobením derivací vnitřní funkce. Někdy se tomuto pravidlu derivování složené funkce říká také *řetězové pravidlo*. Věta uvádí tedy jeho princip pro derivování složené funkce tvaru $f(g(x))$, ale z tohoto principu lze snadno nahlédnout zobecnění i pro více vložených funkcí: vždy postupujeme od vnější funkce, tu derivujeme tak, jako by byla jednoduchého argumentu; pak postupujeme dovnitř a derivujeme další funkce, až se dostaneme k poslední, vnitřní funkci, která již není složená; jednotlivé derivace vynásobíme. Derivaci složené funkce si můžeme představit jako loupání cibule. Nejprve sloupneme první vrstvu, pak druhou, třetí a tak dále až se dostaneme k samému středu nebo jádru.

Uvedeme ještě příklad, který vysvětlí, proč je řetězové pravidlo právě tvaru součinu derivací jednotlivých složek složené funkce.

Předpokládejme, že poptávka $D(p)$ po určitém zboží závisí na jeho ceně p a že tato cena p závisí na čase - jak je obvyklé, cena se s časem mění a obvykle roste v čase: lze psát $p = p(t)$ neboli cena zboží je funkcí času. Proto celkově - prostřednictvím závislosti $p = p(t)$ - poptávka závisí až na čase jako složená funkce: $D = D(t) = D(p(t))$. Předpokládejme nyní například, že jednotková cena našeho zboží vzroste za jednotku času 1,2-násobně a že poptávka na takovou změnu v jednotkové ceně zboží reaguje 80 procentním poklesem prodeje zboží (ve vhodných jednotkách: balení, kusech a pod.) K jaké změne - poklesu poptávky za časovou jednotku tedy dochází: uvedené změny se násobí, tj. poptávka klesne mírou, která je součinem $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$ neboli má hodnotu 96 procent velikosti původní poptávky.

Nyní si ukažme příklad.

Výpočet derivace složené funkce

Příklad 9.2.2. Vypočteme derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

1. $y = (x^5 + x^3 + 1)^6$
2. $y = sin^2(x^2 + 3)$
3. $y = \frac{4}{(1-x)^2}$

***Řešení:* 9.2.2.** 1. U první funkce vidíme okamžitě podle závorek, že jsou do sebe vloženy pouze dvě funkce. Vnější funkce je šestá mocnina argumentu v závorce, vnitřní funkce pak přímo ta funkce v závorce, kterou si můžeme označit třeba $z = z(x) = x^5 + x^3 + 1$.

V kapitole **??** jsme zavedli označení derivace užívané Leibnizem, nyní si vysvětlíme jeho výhody. V prvé řadě je ze zlomku $\dfrac{dy}{dx}$ okamžitě vidět, jak derivace vznikla, tedy derivovali jsme y podle nezávislé proměnné x. Druhou výhodu zápisu zlomkem využíváme při derivaci složených funkcí. V tomto příkladě jsme použili vyjádření $y = y(z) = y(z(x))$, hledáme tedy derivaci y podle x:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

ale y je funkcí z. Pokud bereme $\frac{dy}{dx}$ jako "klasický"zlomek, můžeme jej rozšířit o naše dz:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Leibnizovo praktické označení nám dává návod, jak počítat derivace složené funkce, a je v něm obsaženo i to označení jako "řetězové pravidlo". V našem případě má funkce tvar $y = z^6$; derivaci pak můžeme vyjádřit následovně:

$$y' = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 6z^5 \cdot (5x^4 + 3x^2 + 0) = 6(x^5 + x^3 + 1)^5(5x^4 + 3x^2 + 0).$$

2. Druhá funkce je poněkud složitější, pro lepší zjištění struktury složené funkce je někdy vhodné předpis funkce přezávorkovat: $(\sin(x^2+3))^2$. Tato funkce je složená ze tří funkcí; z druhé mocniny ($y = (z)^2$), z goniometrické funkce sinus ($z = \sin t$) a kvadratické funkce ($t = x^2 + 3$), a to v tomto uvedeném pořadí od vnější k vnitřní. Její derivace je proto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2z \cdot \cos t \cdot (2x) = 2\sin(x^2 + 3) \cdot \cos(x^2 + 3) \cdot 2x = 2x \cdot \sin(2x^2 + 6).$$

3. Na první pohled není tento příklad typickou úlohou na derivaci složené funkce. V odstavci věnovaném derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí jsme derivaci počítali podle vzorce pro derivaci podílu. Dále jsme se zmínili, že pokud je v čitateli zlomku pouze konstanta, lze derivaci počítat jednodušším způsobem. Tedy: $y = \frac{4}{(1-x)^2} = 4(1-x)^{-2}$, což je tvar složené funkce a její derivace je:

$$y' = 4(-2)(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 8(1-x)^{-3} = \frac{8}{(1-x)^3} \cdot \clubsuit$$

V závěru kapitoly **??** jsme diskutovali problém vyjádření tečny grafu funkce v libovolném bodě T a s ním spojené vyhledávání intervalů, kde funkce roste či klesá. Určit vlastnost funkce "je rostoucí", "je klesající"můžeme obecněji nahradit slovy "*vyšetřete monotonii funkce*".

Nyní ukážeme řešení praktických úloh, v nichž je úkolem najít tečnu, případně vyšetřit monotonii funkce.

Úlohy o tečnách 1

Příklad 9.2.3. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0, y_0]$.

1. $y = x^2 - 2x, \ T[4, ?]$
2. $y = 2\cos x, \ T[0, ?]$

***Řešení:* 9.2.3.** 1. Podle vztahu **??** pro rovnici tečny t grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[x_0, y_0]$ máme

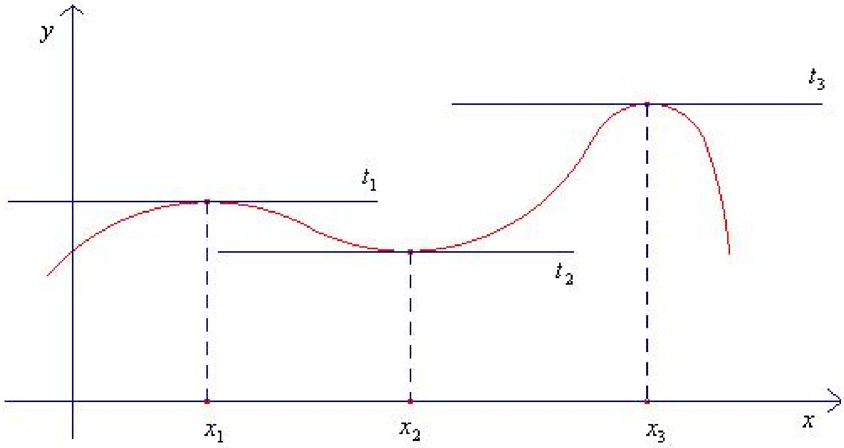
$$t: \ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Proto je pro nalezení rovnice tečny nutná znalost směrnice $k_t = f'(x_0)$ a bodu dotyku $T[x_0, y_0]$. V zadání je ovšem uvedena pouze x-ová souřadnice bodu dotyku T, je proto nutné nejprve najít y-ovou souřadnici, což není nic jiného, než určit funkční hodnotu funkce f pro $x_0 = 4$. Tedy

$$y_0 = f(x_0) = f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$$

a pro směrnici k_t platí

$$k_t = f'(x_0) = (2x - 2)_{x=4} = 6.$$



Obrázek 9.6: Ilustrativní obrázek tečny v bodě, pro který platí $f'(x_1) = 0$.

Po dosazení do vztahu **??** dostáváme rovnici tečny

$$t: y - 8 = 6 \cdot (x - 4) \text{ neboli } t: y = 6x - 16.$$

2. Ukažme si nyní na tomto příkladu vlastnost, která bude pro další úvahy naprosto nezbytná. Opět budeme hledat tečnu ke grafu funce. Obdobně jako v minulé úloze nejprve dopočítáme y-ovou souřadnici bodu dotyku a poté pomocí derivace i směrnici tečny v tomto bodě:

$$y_0 = f(0) = \cos 0 = 1, \quad \text{proto } k_t = (\cos x)'_{x=0} = -\sin 0 = 0.$$

Po dosazení do vztahu (1.8) získáme rovnici tečny:

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0) \text{ neboli } y = 1. \clubsuit$$

Tečna je tedy přímka rovnoběžná s osou o_x a prochází bodem $[0,\ 1]$. Pro ilustraci uvádíme obecný obrázek **??** takové situace.

Zjistili jsme jednu zajímavou skutečnost: pokud derivace v bodě dotyku je rovna 0, pak je tečna rovnoběžná s osou o_x a graf funkce v tomto bodě může, ale nemusí dosahovat své maximální resp. minimální hodnoty (svého extrému). Jinými slovy řečeno pokud je derivace funkce v bodě T nenulová, funkce zde nemůže dosáhnout maximální resp. minimální hodnoty. Tato úvaha nám přinesla nový poznatek; známe nyní *nutnou podmínku pro existenci extrému funkce*: je to podmínka

$$f'(x_0) = 0 \tag{9.12}$$

Poznámka 9.2.5. Jde pouze o *nutnou, nikoliv postačující podmínku.* Co to znamená: např. funkce $y = x^3$ nemá v bodě $T[0,\ 0]$ extrém a přitom je její derivace v bodě $x = 0$ nulová. Využití získaného poznatku uvidíme v další kapitole (Optimalizace).

V mnoha praktických úlohách se setkáváme s jiným typem úloh, kde hledáme rovnici tečny ke grafu funkce, ale neznáme ani jednu souřadnici dotykového bodu. Máme ale jiné informace; například víme, že daná tečna má

- mít směrnici rovnu konkrétní hodnotě,

- s osou o_x svírat daný úhel α,
- být rovnoběžná se zadanou přímkou p,
- být kolmá na zadanou přímkou p.

Ukažme si na příkladech, jak řešit výše zmíněné úlohy.

Úlohy o tečnách 2

Příklad 9.2.4. Je dána funkce $f: y = 2x^2 + x - 1$. Na grafu funkce $y = f(x)$ určeme bod $T[x_0, y_0]$ tak, aby:

1. tečna v bodě T měla směrnici $k_t = 5$;
2. tečna v bodě T měla směrový úhel $\alpha = 60^0$;
3. tečna v bodě T byla rovnoběžná s přímkou $p: y - x - 10 = 0$;
4. tečna v bodě T byla kolmá k přímce $p: y = 1 - 3x$.

***Řešení:* 9.2.4.** Hlavní myšlenkou postupů řešení těchto úloh zůstává: potřebujeme najít směrnici tečny ke grafu funkce a ta je rovna derivaci funkce v bodě.

1. Pokud má mít tečna směrnici $k_t = 5$, lze její směrnici najít jako derivaci funkce v bodě dotyku, tedy
$$f'(x) = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1 = 5.$$
Odtud $x_0 = 1$. Nyní již víme, že x-ová souřadnice bodu dotyku je rovna 1 a stačí pouze dohledat y-ovou souřadnici jako funkční hodnotu $y_0 = f(1) = 2$.
Konečně hledaný bod je $T[1, 2]$.

2. Pokud si uvědomíme, že pro směrnici k přímky ve směrnicovém tvaru $y = k \cdot x + q$, tedy i pro tečnu, platí $k = tg\,\alpha$, můžeme zadání přeformulovat: hledáme bod T tak, aby tečna procházející tímto bodem měla směrnici $k_t = tg\ 60^0 = \sqrt{3}$. Takový příklad jsme již před chvílí řešili.
Má být
$$f'(x) = 4x + 1 = \sqrt{3}, \text{ odkud } x_0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{4},\ y_0 = -\frac{3}{4}.$$
Hledaným bodem je $T\left[\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{3}{4}\right]$.

3. Nutnou a postačující podmínkou rovnoběžnosti dvou přímek je rovnost jejich směrnic. Pro větší přehlednost převedeme obecný tvar přímky p na směrnicový tvar $p: y = x + 10$ a máme $k_p = 1$. Opět tedy řešíme stejnou úlohu:
$$f'(x) = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1 = 1, \text{ odkud } x_0 = 0,\ y_0 = f(0) = 1.$$
Bodem dotyku je $T[0, 1]$.

4. Nutnou a postačující podmínkou kolmosti dvou přímek t, p je:
$$t \perp p \text{ tehdy a jen tehdy, jestliže } k_t \cdot k_p = -1$$
(symbolem $t \perp p$ se zapisuje kolmost přímek t, p). V našem případě je $k_p = -3$ a podle předchozího vztahu musí být pro směrnici tečny kolmé na přímku p splněno $k_t = \frac{1}{3}$. Odtud plyne:
$$f'(x) = (2x^2 + x - 1)' = 4x + 1 = \frac{1}{3},\ \text{proto } x_0 = -\frac{1}{6},\ y_0 = f(0) = -\frac{10}{9}.$$
Hledaným bodem je $T\left[-\frac{1}{6}, -\frac{10}{9}\right]$. ♣

Monotonie

Příklad 9.2.5. Užitím derivace funkce $y = f(x)$ určeme intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí, resp. klesající:

1. $y = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

2. $y = x + \dfrac{1}{x}$

***Řešení:* 9.2.5.** Připomeňme, že funkce je rostoucí, resp. klesající v bodě právě tehdy, když je derivace v tomto bodě kladná, resp. záporná. Tedy body, v nichž derivace mění znaménko, pro nás budou důležité. Aby se tak stalo, musí hodnota derivace funkce v bodě **"přejít přes nulu"**. Protože jde o významnou množinu bodů, získala speciální název. Body, v nichž $f'(x) = 0$, nazýváme *stacionární (také kritické) body*. Samozřejmě musíme vzít v úvahu i body, které nejsou v definičním oboru funkce f a f', neboť v nich nelze vyloučit změnu monotonie funkce.

1. Kvůli určení stacionárních bodů vypočítejme derivaci funkce a položme ji rovnou nule: máme

$$f'(x) = (2x^3 - x^2 - 8x + 4)' = 6x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Vyřešením kvadratické rovnice získáme dvě hodnoty $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{4}{3}$. Definičním oborem dané funkce jsou všechna reálná čísla, proto zůstávají oba body podezřelé ze změny monotonie. Celý definiční obor $D(f)$ můžeme rozdělit na tři intervaly:

$$(-\infty,\, -1); \qquad \left(-1,\, \frac{4}{3}\right); \qquad \left(\frac{4}{3},\, \infty\right).$$

V jednotlivých intervalech se již znaménko první derivace nemění, proto v nich funkce stále roste nebo klesá. Postačí vybrat libovolnou hodnotu x z každého intervalu a podle znaménka první derivace v x rozhodnout, zda tam funkce roste či klesá. V prvním intervalu zvolíme například $x = -2 \Longrightarrow f'(-2) = 20 > 0$, tedy na intervalu $(-\infty,\, -1)$ funkce roste. Z druhého intervalu vybereme hodnotu $x = 0 \Longrightarrow f'(0) = -8 < 0$, funkce je na intervalu $\left(-1,\, \frac{4}{3}\right)$ klesající. Konečně pro třetí interval zvolme $x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 12 > 0$, proto funkce je na intervalu $\left(\frac{4}{3},\, \infty\right)$ opět rostoucí.

2. Teď bez slovního doprovodu.

$$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Derivace není definovaná v bodě $x_1 = 0$. Po úpravě rovnice získáme stacionární body

$$x_2 = 1,\ \ x_3 = -1.$$

Pokud je bodů více, bývá vhodné nakreslit si reálnou osu a jednotlivé hodnoty zapsat ve správném pořadí (od nejmenší k největší, zleva doprava) a znaménko derivace funkce v bodě z každého takto vzniklého intervalu naznačit rostoucí či klesající šipkou jako na obrázku **??**. Daná funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty,\, -1)$, $(1,\, \infty)$ a klesající na intervalech $(-1,\, 0)$, $(0,\, 1)$. ♣

9.3 Monotonie a extrémy

V předchozích odstavcích jsme se postupně setkávali s pojmy **stacionární bod, monotonie** a **lokální extrém**. Přistupovali jsme k nim tak, aby byly čtenáři především srozumitelné a mnohdy se stalo, že korektní zápisy a definice byly zatlačeny do pozadí. Vzhledem k důležitosti předchozího textu pro následující kapitoly, si nabyté poznatky nyní shrneme a doplníme (již naprosto korektním způsobem). Připravíme si tak veškeré nástroje potřebné k řešení stěžejního problému učiva tohoto semestru - pro vyšetřování průběhu funkce.

Definice 9.3.1. Bod x_0 nazýváme **stacionárním bodem funkce** f, existuje-li $f'(x_0)$ a je-li $f'(x_0) = 0$.

Definice 9.3.2. Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *rostoucí* v bodě $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že

$$\forall x \in P^-(a) : f(x) < f(a) \text{a} \forall x \in P^+(a) : f(x) > f(a).$$

Obdobně můžeme definovat pojmy *klesající, neklesající a nerostoucí*.

Poznámka 9.3.1. $P^-(a)$, resp. $P^-(a)$ značí levé, resp. pravé prstencové okolí bodu a.

Definice 9.3.3. Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$

1. *ostré lokální maximum* právě tehdy, když existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že $\forall x \in P(a) : f(x) < f(a)$
2. *ostré lokální minimum* právě tehdy, když existuje $P(a) \subset D(f)$ takové, že $\forall x \in P(a) : f(x) > f(a)$

Pokud zaměníme ostré nerovnosti za neostré, dostaneme definici pro *lokální maximum*, resp. *lokální minimum*. Obecně mluvíme o *lokálních extrémech*.

Máme tedy zadefinovány nejdůležitější pojmy a nyní si uvedeme několik vět, které nám pomohou jednoduše zjišťovat, na kterých intervalech je funkce rostoucí (klesající), resp. jak dohledat lokální extrémy těchto funkcí.

Věta 9.3.1. ***(Postačující podmínka pro lokální monotonii)*** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Pak*

1. *je-li $f'(a) > 0$, je f v a rostoucí,*
2. *je-li $f'(a) < 0$, je f v a klesající.*

Věta 9.3.2. ***(Nutná podmínka pro lokální extrém - věta Fermatova)*** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a) \in \mathbb{R}^*$. Má-li funkce f v bodě a extrém, pak $f'(a) = 0$.*

Předchozí tvrzení nám sice zajišťuje podmínku, za které by mohl nastat v bodě extrém, nic nám však neříká, zda tam opravdu nastane. Je dobré si uvědomit směr předchozích dvou tvrzení (implikací):

kladná (záporná) derivace v bodě $\Rightarrow$ funkce v bodě roste (klesá)

extrém v bodě $\Rightarrow$ nulová derivace v bodě.

Obráceně to neplatí, což si ukážeme na příkladě. Uvažujme funkci

$$f : y = x^3, x \in \mathbb{R}$$

v bodě $x = 0$. Derivace $f'(x) = 3x^2$ a tedy $f'(0) = 0$, přitom v libovolném levém okolí nuly platí: $\forall x \in P^-(0) : f(x) < f(0)$ a v libovolném pravém okolí nuly platí: $\forall x \in P^+(0) : f(x) > f(0)$. Tedy v bodě $x = 0$ není extrém, přestože $f'(0) = 0$ a navíc je tam rostoucí, i když neplatí $f'(0) > 0$. Dále by nás mohla zneklidnit informace, že extrému může nabýt funkce v bodě, v němž derivace vůbec neexistuje. Pro ilustraci nemusíme chodit daleko. Velmi známá funkce $f : y = |x|$ naše obavy splňuje. Tato funkce nemá v bodě $x = 0$ derivaci, má zde pouze jednostranné derivace (jednostranné limity) $f'_- = -1$ a $f'_+ = 1$. Přitom víme, že má v tomto bodě minimum ($\forall x \in P(0) : f(x) > 0$).

Bylo by tedy žádoucí poznat nějaké kritérium, které by nám nejen zaručilo, že v daném bodě extrém nastane, ale také nám objasnilo, o jaký extrém se bude jednat (maximum nebo minimum), nebo-li hledáme postačující podmínku pro existenci maxima, resp. minima.
Abychom ji mohli vyslovit, je nutné poznat, jak se chová funkce nejen v daném bodě, ale také v jeho okolí (intervalu). Vyslovme další užitečnou větu.

Věta 9.3.3. *(**O monotonii na intervalu**) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá na intervalu **I** a nechť v každém vnitřním bodě intervalu **I** existuje derivace, pak platí:*

1. *Funkce f je na intervalu **I rostoucí (klesající)**, právě když pro všechny vnitřní body x je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).*
2. *Funkce f je na intervalu **I neklesající (nerostoucí)**, právě když pro všechny vnitřní body x je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*
3. *Je-li $f'(x) = 0$ pro každý vnitřní bod intervalu **I**, je f konstantní na **I**.*

Jak již bylo řečeno znaménková změna první derivace ovlivňuje monotonii funkce. Zaměřme se konečně na body (stacionární body), v nichž k této změně dochází. Velmi výstižný název pro stacionární body je též "body podezřelé z extrému".

Věta 9.3.4. *(Postačující podmínky pro lokální maximum) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *Je-li f rostoucí na $P^-(a)$ a klesající na $P^+(a)$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*
2. *Je-li $\forall x \in P^-(a) : f'(x) > 0$ a $\forall x \in P^+(a) : f'(x) < 0$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*

Věta 9.3.5. *(Postačující podmínky pro lokální minimum) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *Je-li f klesající na $P^-(a)$ a rostoucí na $P^+(a)$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*
2. *Je-li $\forall x \in P^-(a) : f'(x) < 0$ a $\forall x \in P^+(a) : f'(x) > 0$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*

Doposud jsem pracovali pouze s první derivací funkce, mnohdy pro nás bude výhodné určit i druhou, třetí a obecně **n-tou derivaci**. Definujme ji tedy.

Definice 9.3.4. Derivaci
$$(f')'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$
budeme nazývat **druhou derivací funkce f v bodě** x_0.

Indukcí pak můžeme zavést derivace vyšších řádů.

Definice 9.3.5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má vlastní derivaci $f^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}$ v nějakém okolí bodu x_0 z definičního oboru $D(f)$. Pak definujeme **n-tou derivaci funkce v bodě** x_0 jako
$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$
Dále klademe $f^{(0)} = f$.

Uveďme ještě poslední tvrzení, které nám mnohdy může pomoci rozhodnout o monotonii či extrému v bodě v případě, kdy prvních $n - 1$ derivací v bodě je nulových.

Věta 9.3.6. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ a existuje $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ takové, že $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ a $f^{(n)} \neq 0$. Pak*

1. *Je-li n sudé a $f^{(n)} > 0$, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.*
2. *Je-li n sudé a $f^{(n)} < 0$, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.*
3. *Je-li n liché a $f^{(n)} > 0$, pak f je v bodě a rostoucí.*
4. *Je-li n liché a $f^{(n)} < 0$, pak f je v bodě a klesající.*

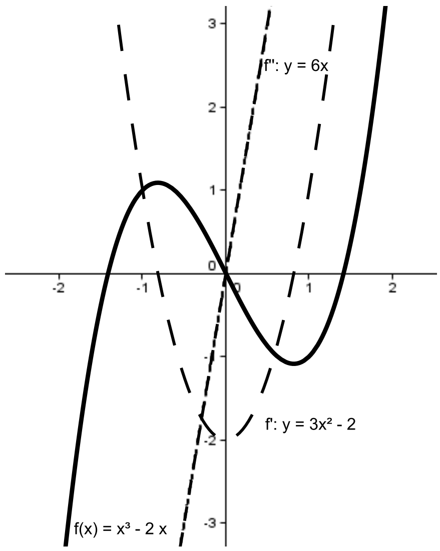
Poznámka 9.3.2. Předchozí věta nám ukazuje mimo jiné způsob klasifikace extrémů, aniž bychom museli vyšetřovat znaménko první derivace. Stačí tedy najít body podezřelé z extrému a spočítat druhou derivaci v těchto bodech. Pokud bude záporná, jedná se o ostré lokální maximum, pokud bude kladná, můžeme ho prohlásit za ostré lokální minimum.
Který ze způsobů klasifikace extrému zvolíme, záleží na nás, resp. na situaci (Je jednodušší dosazovat dvě hodnoty do první derivace, nebo vypočítat hodnotu druhé derivace ve stacionárním bodě?). V následujících příkladech využijme oba postupy.

Uvedeme zde ještě jednodušší a ucelenější zápis postačující podmínky pro lokální extrémy.

Věta 9.3.7. *Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje v bodě x_0 druhá derivace.*

1. *Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*
2. *Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Všechny výše uvedené poznatky si ilustrujme na funkci $y = x^3 - 2x$ (viz. obrázek **??**), kde vidíte i její první a druhou derivaci!



Obrázek 9.7: Funkce a její derivace

Příklad 9.3.1. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $f : y = (x^2 - 1)^4$

***Řešení:* 9.3.1.** Nejprve najdeme stacionární body (body podezřelé z extrému), tedy body pro které je splněna nutná podmínka pro existenci extrému $f'(x) = 0$.

$$f' : y' = ((x^2 - 1)^4)' = 4(x^2 - 1)^3 \cdot 2x = 0$$

Podle pravidla, že součin se rovná nule právě tehdy, když alespoň jeden ze členů součinu se rovná nule, nám vychází: $x = -1$ nebo $x = 0$ nebo $x = 1$. Rozdělíme reálnou osu na čtyři intervaly: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Zvolíme libovolnou hodnotu z každého intervalu a podle věty **??** určíme znaménko první derivace v každém intervalu.
Přehledné znázornění vidíte v tabulce. Tedy funkce f klesá na intervalech $(-\infty, -1), (0, 1)$ a roste na intervalech $(-1, 0), (1, \infty)$. Navíc z tabulky plyne, že v bodech $[-1, 0]$ a $[1, 0]$ je ostré lokální minimum a v bodě $[0, 1]$ ostré lokální maximum.

$(-\infty, -1)$	$[-1, 0]$	$(-1, 0)$	$[0, 1]$	$(0, 1)$	$[1, 0]$	$(1, \infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

♣

Příklad 9.3.2. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $f : y = x + \frac{1}{x-2}$

***Řešení:* 9.3.2.** Nejprve najdeme stacionární body (body podezřelé z extrému).

$$f' : y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} = 0.$$

Body podezřelé z extrému jsou $x = 1$ nebo $x = 3$. Extrémy zkusíme najít druhou metodou pomocí hodnot druhé derivace. Nejprve vyjádříme druhou derivaci:

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)-(x-3)(x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Po dosazení bodů podezřelých z extrému dostáváme: $f''(1) = -2 < 0$, resp. $f''(3) = 2 > 0$ a podle věty **??** pro $x = 1$ má funkce lokální maximum, resp. pro $x = 3$ lokální minimum. Intervaly monotonie pak doplníme z následující úvahy. Pokud má funkce v bodě $[1, 0]$ lokální maximum, pak před tímto bodem musela růst a za ním klesat (pro minimum samozřejmě naopak). Následující tabulka pak naše úvahy sumarizuje.

Poznámka 9.3.3. Při konstrukci tabulky nesmíme zapomenout na hodnoty mimo definiční obory a hodnoty, v nichž derivace neexistuje.

$(-\infty,1)$	$[1,0]$	$(1,2)$	$x=2$	$(2,3)$	$[3,4]$	$(3,\infty)$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

♣

Příklad 9.3.3. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $f : y = (x^2-1)^3$

***Řešení:* 9.3.3.** Obdobně jako v prvním příkladě i zde najdeme nulové body první derivace funkce f:

$$f' : y' = ((x^2-1)^3)' = 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = 0,$$

neboli $x = -1$ nebo $x = 0$ nebo $x = 1$. Po výpočtu libovolných hodnot funkce v jednotlivých intervalech vychází: funkce f klesá na intervalech $(-\infty, 0)$ a roste na intervalech $(0, \infty)$ (viz. následující tabulka). Extrémy zkusíme najít opět druhou metodou, tedy pomocí hodnot druhé derivace. Nejprve vyjádříme druhou derivaci:

$$f''(x) = 6(x^2-1)2x \cdot 2x + 3(x^2-1)^2 \cdot 2 = 24x^2 \cdot (x^2-1) + 6(x^2-1)^2 = (x^2-1)(30x^2-6).$$

Po dosazení bodů podezřelých z extrému dostáváme: $f''(\pm 1) = 0$. Tímto způsobem tak nelze rozhodnout a musíme se vrátit ke zkoumání znaménkových změn první derivace, ovšem pro $f''(\pm 0) = 6 > 0$, tedy v bodě $x = 0$ funkce nabývá svého lokálního minima. Vzhledem k absenci jiných znaménkový změn se jedná o jediný extrém funkce.

$(-\infty,-1)$	$[-1,0]$	$(-1,0)$	$[0,-1]$	$(0,1)$	$[1,0]$	$(1,\infty)$
$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$		$\nearrow$

♣

Příklad 9.3.4. Vyšetřete monotonii a klasifikujte extrémy funkce $y = 1 + 2x + \dfrac{18}{x}$

***Řešení:* 9.3.4.**

$$f' : y' = (1 + 2x + \frac{18}{x})' = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 = 18 \quad \rightarrow \quad x = -3 \vee x = 3.$$

Při dělení reálné osy si musíme dát pozor na jednu důležitou věc. Nestačí ji rozdělit pouze body -3 a 3, musíme ji ještě doplnit doplnit o číslo 0. Důvod je nasnadě: podle věty **??** musí být funkce v jednotlivých intervalech spojitá. Naše funkce však má v intervalu $(-3, 3)$ bod nespojitosti $x = 0$.
Funkce f klesá na intervalech $(-3, 0), (0, 3)$ a roste na intervalech $(-\infty, -3), (3, \infty)$. Lokálního minima nabývá funkce v bodě $x = 3$ a lokálního maxima v bodě $x = -3$, (viz. následující tabulka).

$(-\infty,-3)$	$[-3,1]$	$(-3,0)$	$x=0$	$(0,3)$	$[3,7]$	$(3,\infty)$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

♣

9.3.1 Věty o střední hodnotě

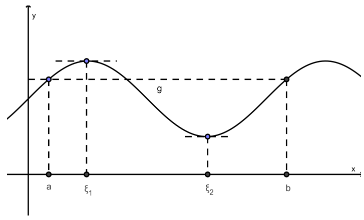
Věta 9.3.8. *(Rolleova věta) Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

1. *Je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*
2. *Má derivaci na otevřeném intervalu (a, b).*
3. *Platí $f(a) = f(b)$.*

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod x takový, že

$$f'(x) = 0.$$

Poznámka 9.3.4. Věta Rolleova sama zaručuje pouze existenci aspoň jednoho takového bodu, neumožňuje nám však ani tento bod určit, ani stanovit počet takových bodů. Geometrický význam Rolleovy věty můžete vidět na obrázku viz **??** .



Obrázek 9.8: Geometrická interpretace Rolleovy věty

Z Rolleovy věty plyne další důležitá věta:

Věta 9.3.9. *(Cauchyova věta) Nechť funkce f, g má následující vlastnosti:*

1. *Jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*
2. *Mají derivace na otevřeném intervalu (a, b).*
3. *Platí $g'(x) \neq 0$ na(a, b).*

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod x takový, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Významným zvláštním případem Cauchyovy věty je věta Lagrangeova, která se používá nejčastěji.

Věta 9.3.10. *(Lagrangeova věta) Nechť funkce f má následující vlastnosti:*

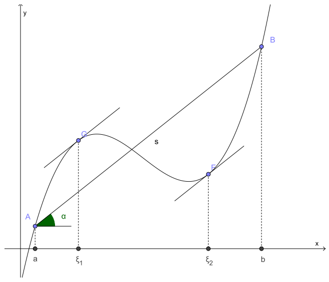
1. *Je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*
2. *Má derivaci na otevřeném intervalu (a, b).*

Potom v otevřeném intervalu (a, b) existuje aspoň jeden bod x takový, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Geometrický význam Lagrangeovy věty ilustruje obrázek **??**.
Lagrangeova věta má některé významné důsledky, které zde uvedeme.

Věta 9.3.11. *Nechť funkce f vyhovuje podmínkám Lagrangeovy věty a navíc ať $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$. Potom je funkce f prostá na $\langle a, b\rangle$.*



Obrázek 9.9: Geometrická interpretace Lagrangeovy věty

Věta 9.3.12. *Funkce f je konstantní na intervalu $x \in (a,b)$, právě když má v tomto intervalu derivaci a platí $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$.*

Věta, kterou se právě chystáme vyslovit, na první pohled nemá nic společného s předcházejícími informacemi, nicméně využívá derivací a pro její důkaz je nezbytná Cauchyova věta. Velmi nám pomáhá při hledání limity podílů dvou funkcí.

Věta 9.3.13. *(l'Hospitalovo pravidlo [čti: lopitalovo pravidlo]) Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in R^*$. Nechť existuje*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

a nechť je splněna jedna z následujících podmínek

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$
2. $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty.$

Pak existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Poznámka 9.3.5. je třeba si uvědomit, že pokud počítáme limitu zlomku pomocí tohoto pravidla, derivujeme čitatele a jmenovatele zvlášť, nikoliv jako zlomek!!!

Příklad 9.3.5. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x+5}{\ln x}$.

Řešení: **9.3.5.** Po dosazení ∞ do funkce, dostáváme tvar $\dfrac{\infty}{\infty}$, který vyhovuje druhé podmínce l'Hospitalova pravidla. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x+5}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} x^3+2x = \infty.$ ♣

Příklad 9.3.6. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$.

Řešení: **9.3.6.** Po dosazení 0 do funkce, dostáváme tvar $\dfrac{0}{0}$, který vyhovuje první podmínce l'Hospitalova pravidla. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\cos 4x}{1} = 4.$ ♣

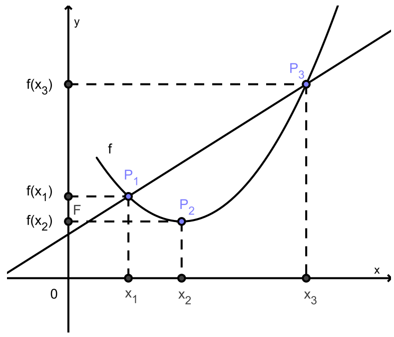
Příklad 9.3.7. Vypočítejte limitu $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$.

Řešení: **9.3.7.** Pokud si vyzkoušíme dosadit do funkce čísla blízké nule zprava, blížíme se tvaru $0 \cdot -\infty$, který není definován. Můžeme si ale pomoci úpravou. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.
Zkusme dosadit teď. Najednou se dostáváme ke tvaru $\frac{-\infty}{\infty}$, který vyhovuje druhé podmínce l'Hospitalova pravidla. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0.$ ♣

9.4 Konvexní a konkávní funkce

🕮 Konvexní a konkávní funkce

Uvažujme obecnou funkci $f(x)$ (viz. obrázek **??**). Zvolíme-li na grafu funkce tři různé body $P_1 = [x_1, f(x_1)], P_2 = [x_2, f(x_2)], P_3 = [x_3, f(x_3)]$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$. Vidíme, že bod P_2 leží pod přímkou P_1P_3.



Obrázek 9.10: Graf konvexní funkce

(Má-li přímka P_1P_3 rovnici $y = kx + q$, pak výrok "P_2 leží pod přímkou P_1P_3"znamená, že P_2 leží v polorovině $\{(x, y) \in R^2; y < kx + q\}$. Vzhledem k našim znalostem z kapitoly "Elementární funkce", najdeme velmi snadno rovnici přímky P_1P_3. Uvedeme ji zde, ale doporučujeme čtenáři, aby si výpočet provedl sám. $y = f(x_1) + \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1)$. Pokud bod P_2 má ležet pod touto přímkou, stačí zaměnit $=$ za $<$ a obecný bod o souřadnicích $[x, y]$ za náš $P_2 = [x_2, f(x_2)]$). Analogickou úvahu lze provést pro bod ležící nad přímkou.

Tato úvaha nás vede k následující definici:

Definice 9.4.1. Nechť f je definována na intervalu **I**. Říkáme, že funkce f je na intervalu **I**

1. **ryze konvexní** právě tehdy, když pro libovolnou trojici $x_1, x_2, x_3 \in$ **I**, $x_1 < x_2 < x_3$ platí
$$f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \tag{9.13}$$
2. **ryze konkávní** právě tehdy, když pro libovolnou trojici $x_1, x_2, x_3 \in$ **I**, $x_1 < x_2 < x_3$ platí
$$f(x_2) > f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1). \tag{9.14}$$

Abychom poznali, zda je konkrétní funkce na intervalu konvexní, resp. konkávní bylo by podle definice nutné ověřit platnost vztahů **??** resp. **??** pro libovolnou trojici bodů, což je velmi náročné. Uveďme si proto větu, která nám dá návod, jak ověřit konvexnost, resp. konkávnost mnohem jednodušeji pomocí znaménka druhé derivace.

Věta 9.4.1. *(O kovexnosti a konkávnosti funkce na intervalu) Nechť je f spojitá na intervalu **I** a nechť v každém vnitřním bodě tohoto intervalu existuje druhá derivace. Pak*

1. *Je-li $f''(x) > 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu **I**, je f ryze konvexní na **I**.*
2. *Je-li $f''(x) < 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu **I**, je f ryze konkávní na **I**.*
3. *Je-li $f''(x) = 0$ v každém vnitřním bodě x intervalu **I**, je f lineární na **I**.*

Stejně jako spolu úzce souvisí monotonie a extrémy, můžeme i zde najít souvislost konvexnosti (konkávnosti) a bodu, kde se tyto dvě vlastnosti mění. Bod, kde se konvexnost mění na konkávnost nebo naopak nazveme **inflexním bodem**.

Věta 9.4.2. *(Nutná podmínka pro existenci inflexního bodu) Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce f a má-li funkce v tomto bodě vlastní druhou derivaci, pak $f''(x_0) = 0$.*

Příklad 9.4.1. Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce $f : (x-1)^3$ a určete inflexní body.

***Řešení:* 9.4.1.** Konkávnost resp. konvexnost funkce nám určuje znaménko druhé derivaci, vyjádřeme si ji.

$$y' = ((x-1)^3)' = 3(x-1)^2,$$

$$y'' = (3(x-1)^2)' = 6(x-1).$$

Opět využijeme věty **??** a rozdělíme reálnou osu dle nulových bodů druhé derivace.

$$y'' = (3(x-1)^2)' = 6(x-1) = 0, \text{nebo-li} x = 1.$$

Z obou intervalů $(-\infty, 1), (1, \infty)$ vybereme libovolná čísla x a určíme pro ně znaménka druhé derivace (volíme $x = 0$ a $x = 2$): $f''(0) = -6$ a $f''(2) = 6$.
Dle věty **??** je funkce f v intervalu $(-\infty, 1)$ ryze konkávní a v intervalu $(1, \infty)$ ryze konvexní. Bod $[1, 0]$ je inflexním bodem.

$(-\infty, 1)$	$[1, 0]$	$(1, \infty)$
$\frown$	IB	$\smile$

♣

Příklad 9.4.2. Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce $f : y = \dfrac{x}{1+x^2}$ a určete inflexní body.

***Řešení:* 9.4.2.** Analogicky prvnímu případu vyjádříme druhou derivaci a položíme ji rovnu nule.

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = 0.$$

Poslední zlomek se rovná nule, právě když se rovná nule čitatel ($2x^3 - 6x = 0$). Dostáváme tři nulové body druhé derivace funkce f: $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$. V jednotlivých intervalech vypočítáme znaménka hodnot jejich bodů. V intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ je funkce konkávní a v intervalech $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty)$ je konvexní. Všechny tři body $[-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}], [0, 0], [\sqrt{}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$ jsou tak body inflexní.

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$[-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}]$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$[0, 0]$	$(0, \sqrt{3})$	$[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$\frown$	IB	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

♣

9.5 Asymptota

Při vyšetřování průběhu funkce a především pro přesnější kreslení jejího grafu je dobré, znát přímky, kterým se graf funkce v okolí některých zajímavých bodů podobá (Zjednodušeně řečeno asymptota je přímka, ke které se graf funkce blíží, ale nikdy se ji nedotkne).

Definice 9.5.1. (Asymptota bez směrnice - ABS) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Přímka $p : x = a$ se nazývá asymptota bez směrnice (svislá asymptota) f v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \text{ nebo } \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Definice 9.5.2. (Asymptota se směrnicí - ASS) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Přímka $p : y = kx + q, x \in \mathbb{R}$ se nazývá asymptota se směrnicí (asymptota v $\pm\infty$) funkce f , jestliže

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Věta 9.5.1. *(O asymptotě se směrnicí) Lineární funkce $p : y = kx + q, x \in \mathbb{R}$ je asymptotou se směrnicí (asymptota v ∞), právě když*

- $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$*, kde* $k \in \mathbb{R}$.
- $q = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$*, kde* $q \in \mathbb{R}$.

Podobná věta platí také pro asymptotu v $-\infty$ a při řešení příkladů na ni nesmíme zapomenout. Použití předchozích odstavců si ukážeme na příkladech.

Příklad 9.5.1. Najděte asymptoty funkce $f : y = \dfrac{x^3}{x(x-1)}$.

***Řešení:* 9.5.1.** Nejprve vyšetříme asymptoty bez směrnice (ABS). Funkce f není definována v bodech $x = 0$ a $x = 1$. Po dosazení $x = 0$ dostáváme tvar $\frac{0}{0}$, můžeme tedy aplikovat l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2x-1} = 0.$$

Asymptota neexistuje. Po dosazení $x = 1$ dostáváme tvar $\frac{1}{0}$, určíme tedy jednostranné limity, abychom odhalili chování funkce v levém, resp. pravém okolí bodu $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x(x-1)} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x(x-1)} = \infty.$$

Dle definice **??**, v bodě $x = 1$ tak existuje asymptota bez směrnice právě o rovnici $a_1 : x = 1$. Hledejme nyní symptoty se směrnicí (ASS). Pokud existují, musíme najít konečné číslo k, resp. q, které představuje směrnici, resp. kvocient asymptoty. Určeme příslušné limity.

$$k_2 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x(x-1)}}{x} = 1,$$

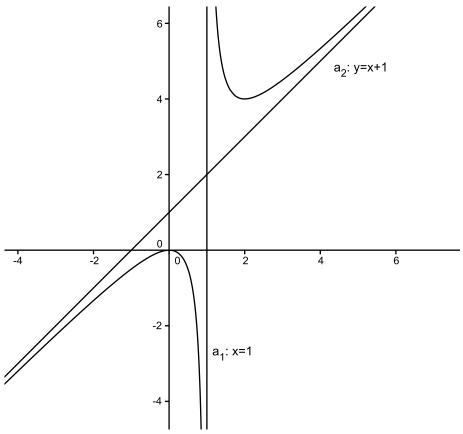
$$q_2 = \lim_{x \to \infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x \to \infty} [\frac{x^3}{x(x-1)} - 1 \cdot x] = 1.$$

Konečné limity existují, proto existuje i ASS s rovnicí $a_2 : y = x + 1$.
Obdobně hledáme limitu pro $x \to -\infty$:

$$k_3 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x(x-1)}}{x} = 1,$$

$$q_3 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - k\cdot x] = \lim_{x\to\infty}[\frac{x^3}{x(x-1)} - 1\cdot x] = 1.$$

Opět vyšlo konečné k i q, ovšem jsou stejné jako pro $x \to \infty$, tedy udávají stejnou asymptotu, proto ji zde již uvádět nemusíme.
Graf funkce spolu s asymptotami vidíte na obrázku **??**.



Obrázek 9.11: Asymptoty funkce $f : y = \dfrac{x^3}{x(x-1)}$

♣

Příklad 9.5.2. Najděte asymptoty funkce $g : y = x^2 \cdot 2^{-x}$.

***Řešení:* 9.5.2.** Analogicky prvnímu příkladu hledejme nejprve ABS.
ABS:
Funkce je spojitá v celém definičním oboru $(-\infty, \infty)$, proto zde ABS nemohou existovat. Tuto informaci si zapamutujme, protože nám při komplexním vyšetřování průběhu funkce ulehčí práci.
Pokud $D(f) = \mathbb{R}$, nemohou existovat ABS!!!
ASS:
Vyšetřeme chování funkce v $\pm\infty$.

Pro ∞:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot 2^{-x}}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\cdot 2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x} \stackrel{2}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\cdot\ln 2} = 0,$$

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}[x^2\cdot 2^{-x} - 0\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\cdot\ln 2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\cdot\ln 2\cdot\ln 2} = 0.$$

ASS má rovnici $a_1 = 0$. Vraťme se ještě k úpravám limit:

- pro k_1 jsme použili úpravu:

  (1) přepis $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x}$

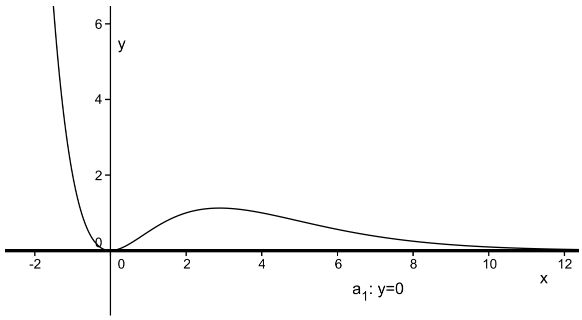
  (2) l'Hospitalovo pravidlo

- pro q_1 jsme aplikovali l'Hospitalovo pravidlo dvakrát za sebou (ověřte se sami oprávněnost jeho využití).

Pro $-\infty$:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot 2^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} x\cdot 2^{-x} = \infty;\text{ ASS v } -\infty \text{ neexistuje.}$$

♣



Obrázek 9.12: Asymptoty funkce $f: y = x^2 \cdot 2^{-x}$

9.6 Průběh funkce

V předchozích kapitolách jsme postupně získávali znalosti a dovednosti, které nyní využijeme pro komplexní vyšetření průběhu funkce. Uveďme si nyní postup, který budeme využívat při řešení problému typu: **Vyšetřete průběh funkce**. Obecně není postup závazný, přesto se jej v dalším budeme držet.

1. Z předpisu funkce $y = f(x)$
   - určíme definiční obor funkce, příp. nulové body
   - určíme paritu funkce (sudá resp. lichá)
   - rozhodneme o spojitosti funkce v definičním oboru
2. Vypočítáme první derivaci funkce
   - určíme definiční obor derivace, příp. nulové body derivace (body podezřelé z extrému)
   - určíme intervaly monotonie (roste resp. klesá)
   - klasifikujeme extrémy
3. Vypočítáme druhou derivaci
   - určíme intervaly konkávnosti resp. konvexnosti funkce
   - určíme inflexní body
4. Sestavíme tabulku dosavadních informací o funkci (není nezbytné, ale je užitečné pro přehlednost a konečný nákres funkce), příp. určíme hodnoty funkce ve význačných bodech (extrémy, inflexní body).
5. Určíme rovnice asymptot (ABS, ASS), pokud existují.
6. Nakreslíme graf funkce.

Poznámka 9.6.1. Pokud zjistíme, že funkce je sudá, resp. lichá, nemusíme vyšetřovat funkci na celém definičním oboru. Stačí ji vyšetřit buď na $(\infty, 0\rangle$ nebo na $\langle 0, \infty)$ a v opačné polorovině se funkce bude chovat symetricky.

Příklad 9.6.1. Určete průběh funkce $f: y = 8x^3(x-1)$ a zakreslete její graf.

Řešení: **9.6.1.** Jde o polynomickou funkci, o které víme, že je spojitá a definičním oborem jsou všechna reálná čísla ($D(f) = \mathbb{R}$), tedy nemůže mít asymptoty bez směrnice. Ověříme paritu: $f(-x) = 8(-x)^3[(-x)-1] = -8x^3(-x-1) \neq f(x) \neq -f(x)$. Funkce tak není ani sudá ani lichá. Přejděme k první derivaci.

$$y' = 24x^2(x-1) + 8x^3 = 8x^2(4x-3).$$

Ta je definovaná a spojitá také na celé ose, najdeme tedy body podezřelé z extrému.
$y' = 24x^2(x-1) + 8x^3 = 8x^2(4x-3) = 0$, právě když $x = 0$ nebo $x = \dfrac{3}{4}$. Rozdělíme číselnou osu dle těchto bodů a budeme zkoumat monotonii a zároveň hledat lokální extrémy.

$(-\infty, 0)$	$[0,0]$	$(0, \frac{3}{4})$	$[\frac{3}{4}, -\frac{27}{32}]$	$(\frac{3}{4}, \infty)$
$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Zjistili jsme, že funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{3}{4})$, roste na $(\frac{3}{4}, \infty)$ a lokální minimum nastává v bodě $[\frac{3}{4}, -\frac{27}{32}]$.

Obdobně si budeme počínat s druhou derivací, kde ovšem nebudeme vyšetřovat monotonii a extrém, ale konvexnost (konkávnost) a inflexní body. Ta je definovaná a spojitá také na celé ose.

$$y'' = 16x(4x-3) + 8x^2(4) = 48x(2x-1).$$

$y'' = 16x(4x-3) + 8x^2(4) = 48x(2x-1) = 0$ právě když $x = 0$ nebo $x = \dfrac{1}{2}$.

$(-\infty, 0\rangle$	$[0,0]$	$\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$	$[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$	$\langle \frac{1}{2}, \infty)$
$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

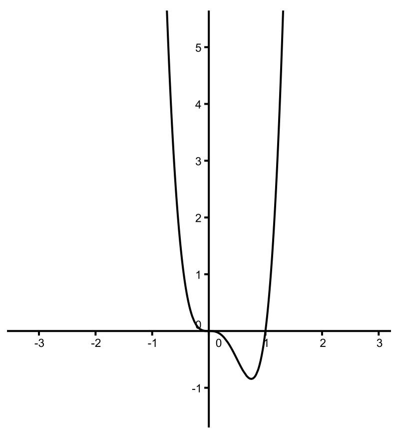
Zjistili jsme, že funkce je konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a $(\frac{1}{2}, \infty)$, konkávní na $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ a inflexní body jsou $[0,0], [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.
Hledejme asymptoty se směrnicí:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} 8x^3(x-1) = \infty.$$

Stejně tak pro $x \to -\infty$, proto ASS také neexistují. Získané poznatky zapíšeme do tabulky:

$f:$	$(-\infty, 0)$	$[0,0]$	$(0, \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$[\frac{3}{4}, -\frac{27}{32}]$	$(\frac{3}{4}, \infty)$
$f':$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$
f''	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$		$\smile$

Třešničkou na dortu je nakreslit graf funkce viz. **??**.



Obrázek 9.13: Graf funkce $f : y = 8x^3(x-1)$

♣

Příklad 9.6.2. Určete průběh funkce $f: y = \dfrac{2}{x^2-1}$ a zakreslete její graf.

Řešení: **9.6.2.** Definičním oborem funkce $y = \dfrac{2}{x^2-1}$ jsou všechna reálná čísla, kromě $x = \pm 1$. Tyto body jsou také jedinými body nespojitosti. Ověříme paritu funkce: $f(-x) = y = \dfrac{2}{(-x)^2-1} = f(x)$. Funkce splňuje podmínky pro funkci sudou, postačí tedy, když budeme vyšetřovat její průběh například v intervalu $\langle 0, \infty)$ (na opačné straně reálné osy se bude chovat symetricky s osou symetrie totožnou s osou y).

První derivace je $y' = \dfrac{0-4x}{(x^2-1)^2}$. Bod podezřelý z extrému (nulový bod první derivace) je pouze $x = 0$. Číselnou osu rozdělíme na intervaly dle nulových bodů první derivace a bodů, v kterých není první derivace definována (omezíme se jen na $\langle 0, \infty)$).

Derivace nabývá záporných hodnot (klesá) na obou intervalech $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Dle symetrie tak musí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0)$ růst. V bodě $x = 0$ dochází ke znaménkové změně první derivace ($+$ na $-$), tedy $[0, -2]$ je lokální maximum.

$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,0)$	$[0,0]$	$(0,1)$	$x=1$	$(1,\infty)$
$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$

Druhá derivace $y'' = \dfrac{-4(x^2-1)^2 + 4x2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$ se nerovná nule pro žádná $x \in \mathbb{R}$, a proto nemohou existovat ani inflexní body a změny v konvexnosti, resp. konkávnosti mohou nastat pouze v bodech, pro které není druhá derivace definována. Kladných hodnot (konvexní) nabývá druhá derivace na intervalu $\langle 1, \infty)$ (vzhledem k symetrii na $(-\infty, -1\rangle$), záporných (konkávní) pak na $\langle 0, 1\rangle$, (vzhledem k symetrii na $\langle -1, 0\rangle$).

$(-\infty,-1\rangle$	$x=-1$	$\langle -1,1\rangle$	$x=1$	$\langle 1,\infty)$
$\smile$		$\frown$		$\smile$

ABS: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2}{x^2-1} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x^2-1} = \infty.$

Opět s přihlédnutím k symetrii funkce jsme objevili dvě asymototy bez směrnice. $a_1 : x = -1$ a $a_2 : x = 1$

ASS: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{2}{x^2-1}}{x} = 0, \qquad q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x^2-1} - 0x = 0.$

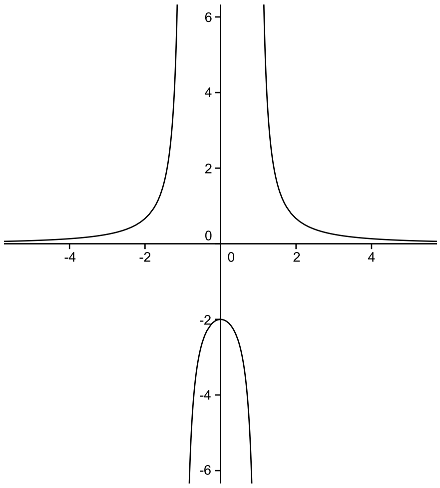
Asymptotou se směrnicí je přímka $a_3 : y = 0$.

Následuje tabulka s kompletními informacemi a graf funkce **??**.

$f:$	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,0)$	$[0,0]$	$(0,1)$	$x=1$	$(1,\infty)$
$f':$	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$
f''	$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$
AS	$a_3 : y=0$	$a_1 : x=-1$				$a_2 : x=1$	$a_3 : y=0$

♣

Příklad 9.6.3. Vyšetřete průběh funkce $f: y = \dfrac{x}{x^2+1}$ a zakreslete její graf.



Obrázek 9.14: Graf funkce $f : y = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

***Řešení:* 9.6.3.** Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, nemůže tak mít ABS. $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -f(x)$, jedná se tedy o funkci lichou a stejně jako v předchozím příkladu, stačí vyšetřovat pouze interval $\langle 0, \infty)$. První derivace $y' = \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$, právě když $x = \pm 1$. Vyšetříme-li znaménka první derivace na intervalu $\langle 0, \infty)$, zjistíme, že funkce je rostoucí na $(0,1)$ a klesající na $(1, \infty)$. Opět ze symetrie (tentokrát podle počátku) plyne, že funkce musí růst také na intervalu $(-1, 0)$ a klesat na $(-\infty, -1)$. Najdeme zde lokální minimum v bodě $[-1, -\frac{1}{2}]$ a lokální maximum v bodě $[1, \frac{1}{2}]$.

$(-\infty, -1)$	$[-1, -\frac{1}{2}]$	$(-1, 1)$	$[1, \frac{1}{2}]$	$(1, \infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Druhá derivace je $y'' = \dfrac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \dfrac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}$. Body podezřelé z inflexe (nulové body druhé derivace) musí splňovat podmínku $2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3) = 0$. Jsou to body $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$. Po zjištění znaménka druhé derivace a znalosti symetrie nám vychází, že funkce je konvexní na $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ a $\langle 3, \infty)$ a konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$. Inflexní body jsou pak $[\pm\sqrt{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}], [0, 0]$.

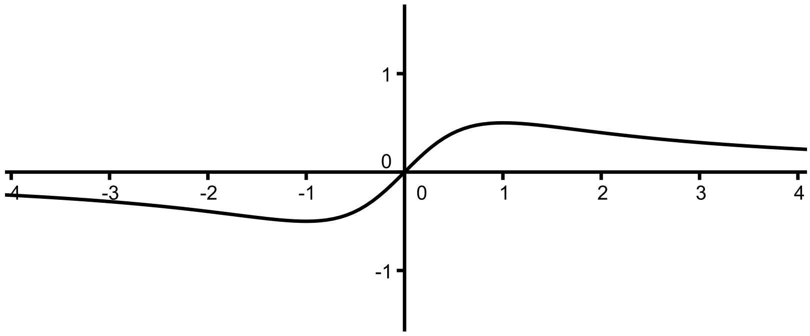
$(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$	$[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$	$[0, 0]$	$\langle 0, \sqrt{3}\rangle$	$[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle 3, \infty)$
$\frown$	IB	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

ASS: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = 0, \qquad q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2+1} - 0x = 0.$

Nalezli jsme ASS o rovnici $y = 0$. Následuje tabulka (vzhledem k velikosti je rozdělena na dvě části na sebe navazující) s kompletními informacemi a graf funkce **??**.

$f:$	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle-\sqrt{3},-1)$	$[-1,-\frac{1}{2}]$	$(-1,0\rangle$
$f':$	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$
$f'':$	$\frown$	IB	$\smile$		$\smile$
AS	ASS $y=0$				

$f:$	$[0,0]$	$\langle 0,1)$	$[1,\frac{1}{2}]$	$(1,\sqrt{3}\rangle$	$[\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}]$	$\langle 3,\infty)$
$f':$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$
$f'':$	IB	$\frown$		$\frown$	IB	$\smile$
AS						ASS $y=0$



Obrázek 9.15: Graf funkce $f: y = \dfrac{x}{x^2+1}$

♣

Příklad 9.6.4. Vyšetřete průběh funkce $f: y = x^2 \cdot e^{-x}$ a zakreslete její graf.

***Řešení:* 9.6.4.** Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$, nemůže tak mít ABS. $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^x \neq \pm f(x)$, funkce není ani sudá ani lichá. První derivace $2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = 0$, právě když $x = 0$ nebo $x = 2$. Následující obrázek ukazuje intervaly monotonie a lokální minimum v bodě $[0,0]$, resp. lokální maximum v bodě $[2, 4e^2]$.

$(-\infty,0)$	$[0,0]$	$(0,2)$	$[2,4e^2]$	$(2,\infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Druhá derivace je $y'' = (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} = e^{-x}(x^2-4x+2)$. Body podezřelé z inflexe pak vycházejí $[2-\sqrt{2},(6-4\sqrt{2})\cdot e^{\sqrt{2}-2}]$ a $[2+\sqrt{2},(6+4\sqrt{2})\cdot e^{-\sqrt{2}-2}]$. V intervalech $(-\infty, 2-\sqrt{2}\rangle$ a $\langle 2+\sqrt{2},\infty)$ nabývá druhá derivace kladných hodnot, funkce je konvexní a v intervalu $\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\rangle$ hodnot záporných, je tedy konkávní.

$(-\infty,2-\sqrt{2}\rangle$	$[2-\sqrt{2},f(2-\sqrt{2})]$	$\langle 2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\rangle$	$[2+\sqrt{2},f(2+\sqrt{2})]$	$\langle 2+\sqrt{2},\infty)$
$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

ASS:

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\cdot e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

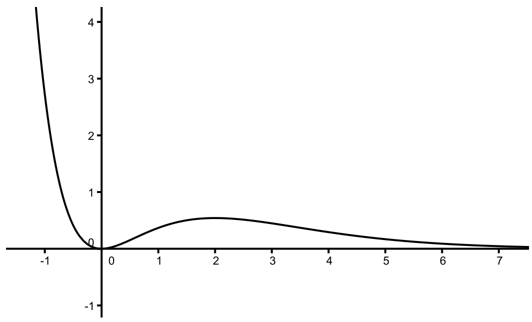
$$q_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} - 0x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Našli jsme asymptotu se směrnicí $a_1 : y = 0$. U obou limit jsem využili l'Hospitalova pravidla. Podívejme se ještě k $-\infty$: $k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$. Druhá asymptota neexistuje.

Následuje tabulka s kompletními informacemi (opět je z důvodů velikosti rozdělena) a graf funkce **??**.

$f:$	$(-\infty, 0)$	$[0,0]$	$(0, 2-\sqrt{2}\rangle$	$[2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2})]$	$\langle 2-\sqrt{2}, 2)$	$[2, 4e^2]$	$(2, 2+\sqrt{2}\rangle$
$f':$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$
$f'':$	$\smile$		$\smile$	IB	$\frown$		$\frown$
AS							

$f:$	$[2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2})]$	$\langle 2+\sqrt{2}, \infty$
$f':$		$\searrow$
$f'':$	IB	$\smile$
AS		ASS $y = 0$



Obrázek 9.16: Graf funkce $f : y = x^2 \cdot e^{-x}$

♣