Kapitola 10

Použití derivací (optimalizační úlohy)

Motivace

Užití diferenciálního počtu je velmi široké a zasahuje nejen do oblasti matematiky, ale také fyziky, chemie a dalších disciplín, kde je nutné zkoumat průběh chování určité veličiny, např. nalezení extrémů či okamžitých změn v čase. Optimalizační úlohy využívají znalosti derivace funkce v bodě. Především z praxe se dá usoudit, že pomocí derivací lze snadno vyřešit problémy, které by se jinak řešili heuristicky (zkusmo).

Příklad 10.0.5. Pro motivaci uvedeme dva příklady.

- *Problém plechovek*
  Představte si, že jsme výrobci nealkoholických nápojů. Zaměřujeme se výhradně na plechovkové balení a plechovky si sami vyrábíme. Jediné, co musíme nakoupit, je plech na jejich výrobu. Víme, že nejlépe se prodávají plechovky o objemu 0,5 litru. Pro jednoduchost předpokládejme válcový tvar plechovky a plechovka bude nápojem naplněna až po okraj. Určitě jako dobří obchodníci nechceme vynakládat zbytečné peníze za nakupovaný plech. Požadujeme tedy plechovku, která bude mít za daného objemu $V = 0,5\,l = 0,5\,dm^3 = 50\,cm^3$ co nejmenší povrch. Jak tedy zvolit rozměry plechovky tak, abychom spotřebovali co nejméně plechu?

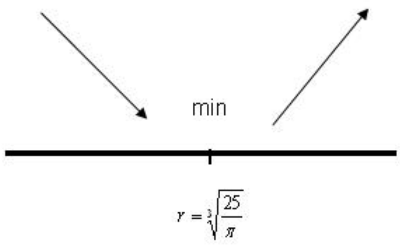
- *Problém vstupenek*
  Změnili jsme povolání a z výrobce plechovek pro nápoje jsme se stali prodejci vstupenek na hudební koncert. Objednali jsme sál pro 800 lidí. Víme, že hudebníci, tisk vstupenek a celková režie nás bude stát 20000 \$. Zbývá zvolit, za kolik \$ budeme vstupenky prodávat zájemcům o koncert. Ze zkušenosti víme, že pokud budeme prodávat jednu vstupenku za 40 \$, určitě vyprodáme celý sál. Dále víme, že každý dolar nad tuto cenu sníží prodej vstupenek o 10 kusů. Máme určit, o kolik dolarů je třeba navýšit cenu tak, aby náš zisk byl maximální.

Poznámky k postupu

Než začneme úlohy řešit, zopakujme si některé poznatky z předchozí kapitoly.

1. Má-li reálná funkce v bodě x_0 kladnou derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí.
2. Má-li reálná funkce v bodě x_0 zápornou derivaci, pak je v tomto bodě klesající.
3. Má-li reálná funkce v bodě x_0 derivaci rovnu nule, pak v tomto bodě může, ale nemusí nabývat extrémní hodnoty (*nutná podmínka existence extrému*).

Výše zmíněné poznatky nám postačí pro vyřešení obou uvedených příkladů.



Obrázek 10.1: Grafické vyznačení monotonie

***Řešení:* 10.0.5.** *Problém plechovek*

V našem případě je plechovka dokonalý válec, jehož velikost povrchu S spočítáme podle vzorce $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$, kde r je poloměr podstavy a v je výška plechovky. Dále víme, že pro objem válce platí vztah $V = \pi r^2 v = 50\, cm^3$. Odtud pro výšku je $v = \frac{50}{\pi r^2}\cdot$ Dosadíme do vztahu pro povrch:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{50}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{100}{r}\cdot$$

Tím jsme dostali velikost povrchu plechovky jako funkci poloměru její podstavy. Naším úkolem je najít takové r, pro něž bude S extrémní. Nutnou podmínku pro existenci extrému jsme již uvedli; použijme ji:.

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{100}{r^2} = 0.$$

Pro poloměr je $r > 0$ (nekladný poloměr je nepřípustný), proto můžeme r^2 celou rovnici vynásobit a po úpravě dostáváme:

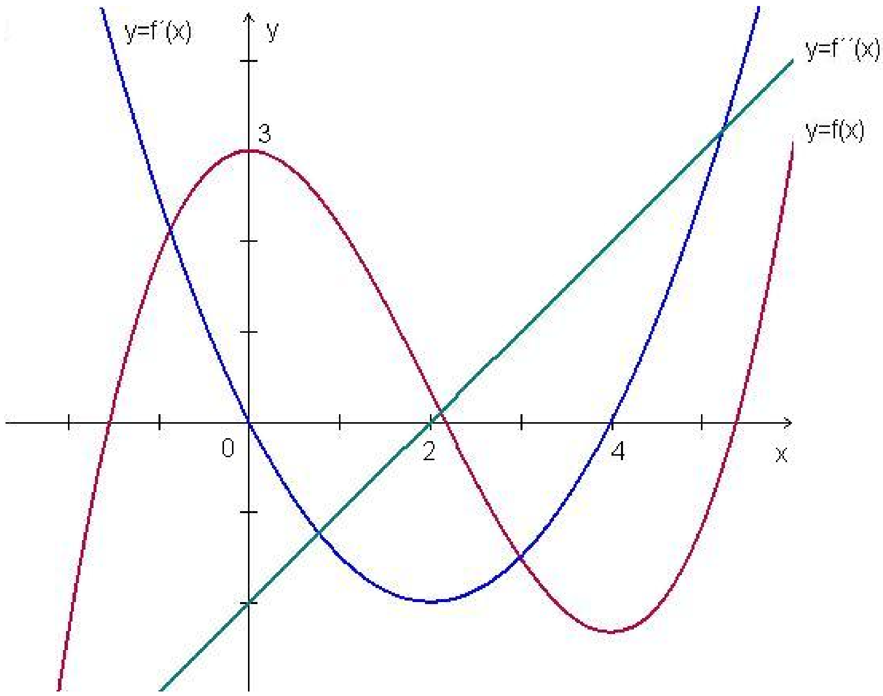
$$r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\cdot$$

Odtud po dosazení

$$v = \frac{50}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{25^2}{\pi^2}}} = \sqrt{\frac{200}{\pi}}\cdot$$

Našli jsme tedy hodnoty neznámých veličin, pro které by mohl mít povrch plechovky extrémní hodnotu. Stále ještě nevíme, zda tam opravdu extrém nastane, ale je jisté, že pokud ne tam, tak nikde jinde (důvodem je nutná podmínka pro existenci extrému). Pro kontrolu, zda jde opravdu o minimální povrch, zjistíme, jak se funkce $S = S(r)$ chová v okolí naší hodnoty $r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\cdot$ Ta nám rozdělila reálnou osu na dva intervaly (obrázek **??**): $\left(0, \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\right)$ a $\left(\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}, \infty\right)$, z nichž v prvním funkce klesá a v druhém roste. Zřejmě pak v bodě $r = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ musela dosáhnout své minimální hodnoty. Příklad je tedy vyřešen.

V předchozím příkladě jsem si ukázali způsob, jak poznat, zda v daném bodě dosahuje funkce své maximální, resp. minimální hodnoty. K jejímu určení jsme museli znát znaménkové změny první derivace v okolí stacionárního bodu. Toto zjišťování znaménkových změn může být v některých případech komplikovanější. Ukážeme si nyní, jak se této nepříjemnosti vyhnout pomocí druhé derivace. To je samozřejmě výhodné jen tehdy, pokud je výpočet druhé derivace jednoduchý.



Obrázek 10.2: Grafy funkce a jejích derivací

Poznámka 10.0.2. *Druhá derivace je první derivace první derivace.*

Pro funkci danou předpisem $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 3$ jsou na obrázku **??** graf funkce $f(x)$, graf její první derivace $f'(x)$ a graf druhé derivace $f''(x)$. Máme $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ a $f''(x) = x - 2$. Z grafu funkce $f'(x)$ můžeme snadno odečíst, kde $f'(x)$ nabývá kladných, resp. záporných hodnot a kde je rovna nule. Na základě toho si můžeme učinit závěry o monotónnosti funkce $f(x)$, resp. o jejích extrémních hodnotách. Nás však zajímá graf druhé derivace $f''(x) = x - 2$. Z obrázku vidíme, že $f''(x) > 0$ v intervalu $(2, \infty)$ a $f''(x) < 0$ v intervalu $(-\infty, 2)$. Druhá derivace je tedy záporná i v bodě, ve kterém má funkce lokální maximum, resp. kladná i v bodě relativního minima. Nyní vyslovíme větu, která bude zobecněním našich předchozích úvah a zároveň je *postačující podmínkou pro existenci extrému*.

Věta 10.0.1. *Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť v bodě x_0 existuje druhá derivace.*

Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální maximum,

je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce $f(x)$ v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Je-li $f''(x_0) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout a je třeba zjistit znaménkové změny první derivace.

Zkusme pomocí nově získaného poznatku spočítat druhý motivační příklad.

Řešení: **10.0.6.** *Problém vstupenek*

Nejprve je nutné z údajů sestavit funkci zisku Z. Zisk bude určitě záviset na ceně vstupenky a na počtu prodaných vstupenek. Zisk se bude rovnat počtu prodaných vstupenek krát hodnota jedné vstupenky mínus náklady na uspořádání koncertu. Pokud označíme x počet dolarů, kterým navýšíme cenu vstupenky nad základní cenu 40 \$, můžeme psát:

$$Z(x) = (40 + x) \cdot (800 - 10x) - 20000,$$

kde první závorka je cenou vstupenky a druhá představuje počet prodaných vstupenek (za každý jeden $ se prodá o 10 vstupenek méně). Získali jsme tedy funkci jedné proměnné a hledáme její maximum: určíme

$$Z'(x) = (12000 + 400x - 10x^2)' = -20x + 400.$$

Podle nutné podmínky pro existenci extrémů musí být první derivace funkce rovna 0. To je splněno pro $x = 20$ dolarů. Cena vstupenky by v optimální případě měla být $40 + 20 = 60$ dolarů. Zda se jedná opravdu o hodnotu, v které funkce nabývá maxima zjistíme podle 2. derivace $Z''(x) = -20 < 0$. Z předchozí věty plyne, že se jedná o lokální maximum.

Sami si můžete zkusit, např. pomocí grafu $Z(x)$, že při žádné jiné ceně vstupenky nebude náš zisk větší.

🕮 Postup řešení

Jak je vidět, optimalizační úlohy se řeší podle stejného postupu. Ten lze vyjádřit jako sled následujících kroků:

1. najdeme popis nebo vyjádření veličiny, která má dosahovat extrému (povrch plechovky, zisk, ...)
2. zjistíme, zda tuto veličinu lze vyjádřit jako funkci jedné, či dvou nebo více proměnných
3. pokud jde o funkci jedné proměnné, můžeme okamžitě hledat první derivaci (viz: vstupenky)
4. pokud jde o funkci dvou (více) proměnných, často je v zadání uvedena nějaká podmínka nebo vztah, který pomůže za jednu proměnnou dosadit; tím dostaneme funkci pouze jedné proměnné (viz: objem plechovky)
5. spočítáme první derivaci této veličiny jako funkce jedné proměnné a tuto derivaci položíme rovnu nule
6. nalezneme hodnoty, pro které by mohla funkce nabývat extrémů
7. pomocí druhé derivace dokážeme existenci extrému

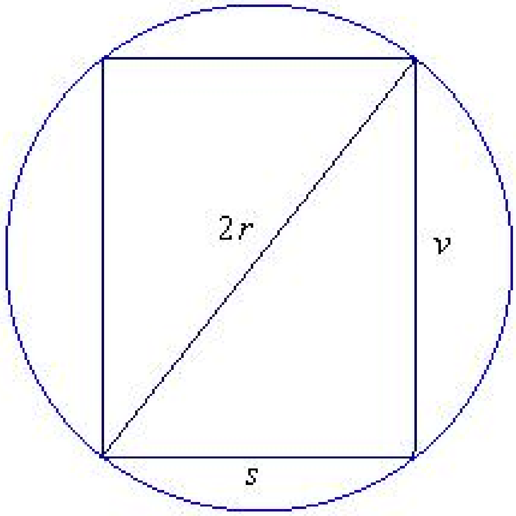
V následujícím příkladě budeme postupovat podle uvedené "kuchařky".

Optimalizační úloha: trám s největší nosností

Příklad 10.0.6. Z válcovitého kmenu s kruhovým průřezem o poloměru r se má vytesat trám co největší nosnosti. Nosnost trámu je určena vztahem $y = k \cdot s \cdot v^2$, kde k je materiálová konstanta daného druhu dřeva, s je šířka průřezu trámu a v je výška průřezu trámu. Jaké rozměry s a v má mít trám, aby jeho nosnost byla maximální?

***Řešení:* 10.0.7.** Na obrázku **??** je vyznačen průřez daného trámu. Budeme postupovat v krocích.

1. V prvním kroku je nutné si uvědomit, která veličina má nabývat extrémní hodnoty. V našem případě je to nosnost - označme ji jako y.
2. Nosnost je určena vztahem
$$y = k \cdot s \cdot v^2, \tag{10.1}$$
tedy je funkcí dvou proměnných s a v a my můžeme třetí krok "kuchařky"přeskočit.
3. Jedinou známou hodnotou v zadání zůstává r, což nám napovídá, že pomocí ní by se dala jedna neznámá (třeba v) vyjádřit pomocí s. Vyjdeme z obrázku **??** a za předpokladu, že průřezem trámu je obdélník, můžeme využít Pythagorovy věty: $(2r)^2 = v^2 + s^2$, odkud plyne
$$v^2 = 4r^2 - s^2.$$
Dosaďme za v^2 do vztahu pro **??**. Získáme vztah pro nosnost trámu v závislosti na jedné proměnné s, a to šířce průřezu trámu:
$$y = k \cdot s \cdot (4r^2 - s^2) = 4k \cdot s \cdot r^2 - k \cdot s^3,$$
neboť k je konstanta a r je pevně dáno poloměrem použitého kmenu.



Obrázek 10.3: Průřez trámem

4. Použijeme nutnou podmínku pro existenci extrému: funkci nosnosti derivujeme a derivaci klademe rovnou nule:
$$y' = \frac{dy}{ds} = 4k \cdot r^2 - 3k \cdot s^2 = 0.$$

5. Předchozí rovnici vyhovují pouze hodnoty $s = \pm\sqrt{\frac{4k \cdot r^2}{3}}$, ale zápornou hodnotu můžeme vyloučit z důvodu významu délky strany s.

6. Pro druhou derivaci dostáváme: $y'' = -6s < 0$ pro všechna přípustná s, tedy i pro naši hodnotu. Záporné znaménko hodnoty druhé derivace v bodě s značí, že naše funkce nabývá maximální hodnoty, neboli nosnost trámu pro nalezenou hodnotu je největší. K této hodnotě je nutné dopočítat ze vztahu $v^2 = 4r^2 - s^2$ hodnotu veličiny s a tím budou rozměry trámu maximální nosnosti určeny. ♣

Poznámka 10.0.3. V třetím kroku jsme mohli vyjádřit i s, ale předpis pro funkci nosnosti by byl komplikovanější.

Optimalizační úloha: nejmenší vzdálenost

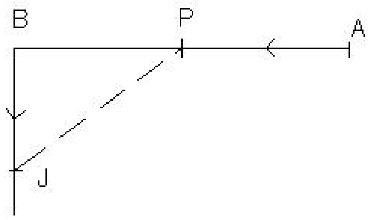
Příklad 10.0.7. Přístavy A, B (viz obr. **??**) jsou od sebe vzdáleny 145 km. Z přístavu A vyjede parník ve směru určeném šipkou a současně ve stejném okamžiku z přístavu B vyjede jachta (ve směru určeném šipkou). Jejich rychlosti jsou stálé, a to pro parník $v_p = 40\,km/h$, pro jachtu $v_j = 16\,km/h$. V jakém čase bude jejich vzájemná vzdálenost nejmenší?

***Řešení:* 10.0.8.** Označme polohy parníku a jachty po t hodinách plavby z přístavů A a B písmeny P a J. Pak délky drah parníku $\overline{AP}$ a jachty $\overline{BJ}$ v čase t hodin od začátku pohybu jsou:

$$\overline{AP} = 40 \cdot t\,km, \qquad \overline{BJ} = 16 \cdot t\,km.$$

Pro vzdálenost $\overline{PJ}$ parníku a jachty v kilometrech v tomto čase t (v hodinách) platí podle Pythagorovy věty

$$\overline{PJ} = \sqrt{\overline{BP}^2 + \overline{BJ}^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2}.$$



Obrázek 10.4: Parník a jachta

Odtud

$$\overline{PJ} = \sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}.$$

Tato odmocnina nabyde nejmenší hodnoty při témže t, při němž bude mít veličina pod odmocninou

$$z(t) = 1856t^2 - 11600t + 21025$$

nejmenší hodnotu. Hledejme tuto nejmenší hodnotu: počítejme

$$z'(t) = 3712t - 11600 = 0,$$

odkud plyne

$$t = \frac{11600}{3712} = 3,125\,hodin.$$

Pomocí druhé derivace lze ukázat, že extremální hodnota je minimem. Tedy parník a jachta budou mít vzájemnou vzdálenost nejmenší za 3 hodiny 7 minut a 30 sekund po jejich vyplutí z A, resp. z B. ♣

Optimalizační úloha: válec s největším objemem

Příklad 10.0.8. Do kužele o poloměru podstavy $r = 4\,m$ a výšce $v = 6\,m$ je vepsán válec, který má mít co největší objem. Vypočítejme ten největší možný objem.

***Řešení:* 10.0.9.** Na obrázku **??** je naznačen průřez daným kuželem. Potřebujeme najít objem tohoto válce, tudíž hledáme velikost poloměru x jeho podstavy a výšky y.

Využijeme trojúhelníky $\triangle AB'C'$ a $\triangle ABC$, které jsou podobné: podobnost dvou trojúhelníků značíme $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$. Z podobnosti pro vzájemné poměry odpovídajících stran plyne

$$\frac{y}{r-x} = \frac{v}{r} \Longrightarrow y = \frac{(r-x)v}{r}.$$

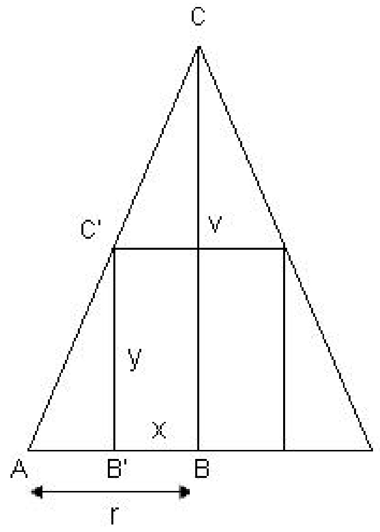
Pro objem válce máme

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \frac{(r-x)v}{r} = \pi x^2 \frac{(4-x)\cdot 6}{4} = \frac{3\pi}{2}(4x^2 - x^3) = V(x).$$

Tudíž objem je funkcí jedné proměnné, a tedy počítáme první derivaci a klademe ji rovnou nule:

$$V'(x) = \frac{3\pi}{2}(8x - 3x^2) = 0 \Longrightarrow x(3x-8) = 0$$

$$x_1 = \frac{8}{3},\ \text{nulový kořen}\ x_2 = 0\ \text{nedává smysl pro řešení úlohy;}$$



Obrázek 10.5: Průřez kuželem

$$V''(x) = \frac{3\pi}{2}(8-6x), \quad V''\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} \cdot \left(8 - 6 \cdot \frac{8}{3}\right) < 0,$$

tedy pro $x = \frac{8}{3}\,m$ je objem válce maximální a jeho hodnota činí $V_{max} = \frac{128\pi}{9}\,m^3$. ♣

10.1 Další využití derivací

V minulé kapitole jsme si uvedli, že derivaci lze interpretovat jako rychlost nebo míru (tempo) změny. Nyní si ukážeme, jak při počítání tuto vědomost aplikovat.

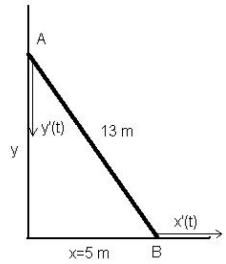
Aplikace derivace: padající žebřík

Příklad 10.1.1. Žebřík dlouhý 13 m se jedním koncem A opírá o zeď a druhým koncem B o podlahu (viz obrázek se žebříkem). Žebřík začne ujíždět, a to tak, že bod B se od zdi vzdaluje rychlostí 1,6 m/min. Zjistěme, jakou rychlostí se pohybuje bod A, když je bod B vzdálen ode zdi 5 m.

Řešení: **10.1.1.** Nejprve si ujasněme, co chceme vypočítat. Zavedeme souřadnicový systém podle obrázku. Víme, že rychlost bodu B pohybujícího se ve směru osy o_x je známa. Pokud označíme jako $x(t)$ velikost dráhy, kterou urazí bod B v čase t od začátku pohybu, můžeme pro rychlost tohoto bodu jako pro derivaci veličiny $x(t)$ podle času napsat

$$x'(t) = 1{,}6\,m/min$$

a analogicky, pro rychlost (v čase t od začátku pohybu) bodu A pohybujícího se ve směru osy o_y pišme $y'(t)$. Našim úkolem je najít $y'(t)$ právě v tom okamžiku, kdy bod B urazí 5 m. Z obrázku je vidět, že podle Pythagorovy věty se splní v každém časovém okamžiku takovém, že $x^2(t) + y^2(t) = 13^2$, odtud plyne $y(t) = \sqrt{169 - x^2(t)}$. Proto



Obrázek 10.6: Žebřík

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{-\,2x(t)\cdot x'(t)}{2\sqrt{169 - x^2(t)}} = \frac{-\,5\cdot 1,6}{\sqrt{169-5^2}} = -\frac{2}{3}\,m/min.$$

Při vyjádření derivace y' platí: délka dráhy bodu B ve směru osy o_x je funkcí času a vzhledem k tomu, že derivujeme podle t, je nutné brát funkci $x^2(t)$ jako funkci složenou. Její derivace podle t je součinem derivace vnější funkce (kvadratické) a derivace samotné funkce $x(t)$, o které nevíme, jaký je její předpis, víme však, že její derivace má hodnotu 1,6 m/min, neboli $x'(t) = 1,6$. (Záporná hodnota y' vyjadřuje směr pohybu zkoumaného bodu B.) ♣