Kapitola 11

Ukázkové testy

Ukázka testových úloh spolu s řešením.

V následující kapitole, z důvodů zvýšení pravděpodobnosti úspěchů studentů při získávání písemné části kolokvia, uvádíme ukázky testů v podobě, v jaké ji studenti obdrží při testování. V druhé části textu pak zájemci naleznou vzorové řešení testových úloh. Bodové hodnocení úloh v hlavičce zadání za označením varianty, berte pouze jako indikátor obtížnosti úlohy, které může být v závislosti na okolnostech změněno.
Ukázkové testy obsahují vždy pět úloh, které představují po obsahové stránce stěžejní část výuky. Předpokládá se, že je psána pouze jedna písemná práce za semestr. Záleží ovšem na vyučujícím, zda nerozdělí učivo do dvou, či více písemných prací, které budou samozřejmě časově méně náročné. Přejeme všem čtenářům úspěšné řešení úloh, které svým dílem přispěje ke zvyšování Vašich ”matematických kompetencí”.

Příklad 11.0.2.

MAT1 test	Jméno:
Varianta A 25,15,10,15,15	Datum:

1. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{5x-1}{x^2}$ a nakreslete její graf.
2. Mějme 900 metrů pletiva na oplocení dvou stejných sousedních obdélníkových pozemků o stejném plošném obsahu (na straně, kde sousedí povede jen jedno oplocení). Jaké rozměry pozemků stanovit, aby součet plošných obsahů byl co největší? Určete i velikost obou pozemků.
3. Vypočítejte limity (v případě, že neexistují, zdůvodněte proč.)

$$a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2x-10)(3x-10)}{2(3x+2)^5} \qquad b)\quad \lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$$

4. Podle zdravotní dokumentace t týdnů po vypuknutí chřipkové epidemie byl počet onemocnění určen jako $f(t) = \dfrac{4}{1+3e^{-0,8t}}$ tisíc osob.
   (a) Jakou rychlostí rostl počet nemocných na začátku prvního týdne?
   (b) Pokud by tento trend pokračoval podle uvedené funkce, k jaké hranici počtu onemocnění by se přiblížil po velmi dlouhé době?
5. Rozložte na parciální zlomky výraz $\dfrac{5x^2+11}{(x-1)(x^2+x+6)}$.

Příklad 11.0.3.

MAT1 test	Jméno:
Varianta B 10,15,25,15,15	Datum:

1. Vypočítejte limity (v případě, že neexistují, zdůvodněte)

$$a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-4)(1-4x)^2}{(3x-1)^2-(3x^2+1)^2} \qquad b)\quad \lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{(1-4x)^2}{x(3x-1)^2}$$

2. Zjistěte, zda funkce $f(x) = \dfrac{3x}{3x+\pi}$ je prostá. V kladném případě určete inverzní funkci $f^{-1}(x)$ a ověřte platnost vztahu $f(f^{-1}(x)) = x$.

3. Vyšetřete průběh funkce $f : y = x + \dfrac{1}{x-2}$ a nakreslete její graf.

4. Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při objemu $V = 2dm^3$ měla nádoba minimální povrch.

5. Určete reálné kořeny polynomu $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$.

Příklad 11.0.4.

MAT1 test	Jméno:
Varianta C 25,15,10,15,15	Datum:

1. Vyšetřete průběh funkce $f : y = x^2 e^x$ a nakreslete její graf.
2. Pořadatel koncertu má k dispozici sál pro 800 diváků. Rozhodl se, že stanovit cenu vstupenky na 1000 Kč. Uvažuje však o zvýšení ceny vstupenky a předpokládá, že za každou stokorunu navíc, přijde o 20 zájemců. Jak má stanovit cenu vstupenky, aby jeho příjem byl maximální.
3. Ve kterých bodech křivky $y = \dfrac{1}{x^2}$ je tečna rovnoběžná s přímkou $p : y - 2x - 6 = 0$?
4. Načrtněte graf funkce $y = -|\ln(x-1)| + 3$.
5. Určete body nespojitosti funkce $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 - 2x^2 - 3x}$ a vypočítejte limity v těchto bodech.

Příklad 11.0.5.

MAT1 test	Jméno:
Varianta D 25,10,15,15,15	Datum:

1. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{x}{4+x^2}$ a nakreslete její graf.
2. Vypočítejte:
$$a) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-2x)(x^2+5x+6)}{x^3+8} \qquad b) \quad \lim_{x\to-2} \frac{(1-2x)(x^2+5x+6)}{x^3+8}$$
3. Napište rovnici tečny t a normály n v bodě $T[8,?]$ funkce $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
4. Načrtněte graf funkce $y = ||x|-1|-1|$.
5. Dostali jste povolení na stavbu bazénu se čtvercovým dnem o objemu $32m^3$. Jaké zvolíte rozměry bazénu, aby spotřeba kachliček na jeho obložení byla minimální?

Řešení: **11.0.2.** (VARIANTA A)

1. $y = \frac{5x-1}{x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad f(-x) = \frac{-5x-1}{x^2} \neq f(x) \neq -f(x) \quad \Rightarrow$ ani sudá ani lichá.
   $y' = \frac{5x^2-(5x-1)2x}{x^4} = \frac{-5x+2}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{5}.$

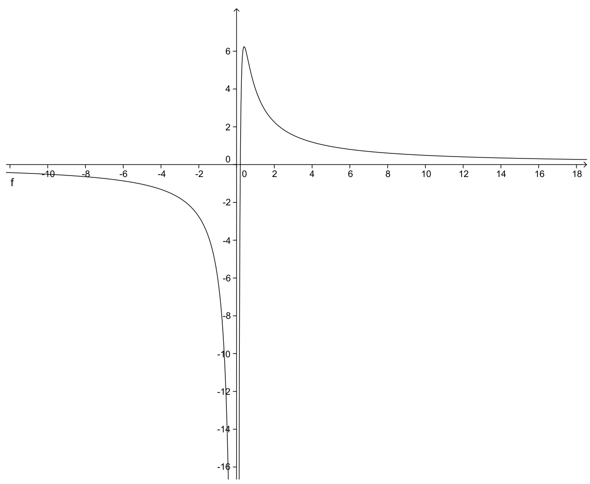
$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{2}{5})$	$[\frac{2}{5}), \frac{25}{4})]$	$(\frac{2}{5}), \infty)$
$\searrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$

   $y'' = \frac{-5x^3-(-5x+2)3x^2}{x^6} = \frac{10x-6}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5}.$

$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{3}{5})$	$[\frac{3}{5}), \frac{50}{9})]$	$(\frac{3}{5}), \infty)$
$\frown$		$\frown$	IB	$\smile$

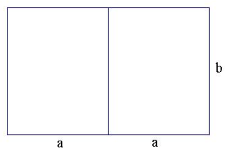
   ABS:
   $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{5x-1}{x^2} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{5x-1}{x^2} = -\infty.$
   $a_1 : x = 0.$

   ASS:
   $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{5x-1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{3x^2} = 0 \; q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{2x} = 0.$
   $a_2 : y = 0.$



Obrázek 11.1: Graf funkce $f : y = \frac{5x-1}{x^2}$

2. $o = 4a + 3b = 900 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{900-4a}{3}.$
   $S = 2ab = 2a\frac{900-4a}{3} = \frac{1800a-8a^2}{3}$
   $S' = \frac{1800-16a}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 112,5m.$
   Po dosazení do prvního vztahu platí: $b = 150m$, $S = 225 \cdot 150 = 33750(m^2)$.



3. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(2x-10)(3x-10)}{2(3x+2)^5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^4+\ldots}{486x^5+\ldots} = 0$

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{0} \quad \Rightarrow$ Je nutné vyšetřit jednostranné limity.
   $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6} = -\infty.$

Jednostranné limity si nejsou rovny, proto limita neexistuje.

4. Počet nemocných v závislosti na čase, udaných v týdnech je dán funkcí $f(t) = \frac{4}{1+3e^{-0,8t}} =$ $= 4(1+3e^{-0.8t})^{-1}$.

   (a) My hledáme rychlost šíření nákazy na počátku ($t = 0$). Tu lze najít jako derivaci této funkce pro $t = 0$.
   $f'(0) = [4(-1)(1+3e^{-0.8t})^{-2}3e^{-0.8t}(-0.8)]_0 = 0.6$(v tisících). Na počátku byla rychlost šíření nákazy 600 osob za týden.

   (b) Zajímá nás limitní počet nakažených osob za velmi dlouhou dobu ($t \to \infty$).
   $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{4}{1+3e^{-0,8t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{4}{1+\frac{3}{e^{0,8t}}} = 4$ (v tisících).

5. Výraz $\frac{5x^2+11}{(x-1)(x^2+x+6)}$ je ryze racionální, jmenovatel již v $\mathbb{R}$ nelze rozdělit.

   Rozklad na parciální zlomky proto bude mít tvar:

$$\frac{5x^2+11}{(x-1)(x^2+x+6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+6}$$

$$5x^2+11 = A(x^2+x+6) + (Bx+C)(x-1) = Ax^2 + Ax + 6A + Bx^2 + x(C-B) - C$$

x^2: $5 = A + B$
x^1: $0 = A + C - B$,
x^0: $11 = 6A - C$

Součet všech rovnic je: $16 = 8A \quad \Rightarrow \quad A = 2$. Z první rovnice pak $B = 3$ a y třetí rovnice $C = 1$.
Výsledný rozklad nabývá tvaru:

$$\frac{5x^2+11}{(x-1)(x^2+x+6)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+x+6}.$$

Řešení: **11.0.3.** (VARIANTA B)

1. (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x^2-4)(1-4x)^2}{(3x-1)^2-(3x^2+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{48x^4-24x^3-61x^2+32x-4}{-9x^4+15x^2-6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(48-\ldots)}{x^4(-9+\ldots)} = \frac{16}{3}$.

   (b) $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{(1-4x)^2}{x(3x-1)^2} = \frac{\text{číslo}}{0}$.

   Je nutné vyšetřit jednostranné limity. $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{(1-4x)^2}{x(3x-1)^2} = +\infty$, $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} \frac{(1-4x)^2}{x(3x-1)^2} = +\infty$.

   Závěrem, lze říci, že $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{(1-4x)^2}{x(3x-1)^2} = +\infty$.

2. Je prostá? $\frac{3x_1}{3x_1+\pi} = \frac{3x_2}{3x_2+\pi}$

   $9x_1x_2 + 3x_{1\pi} = 9x_1x_2 + 3x_{2\pi}$

   $x_1 = x_2 \quad \Longrightarrow$ Funkce je prostá.

   Inverzní funkce:
   $x = \frac{3y}{3y+\pi}$

   $3xy + x\pi = 3y$

   $y(3x-3) = -x\pi$

   $f^{-1} : y = \frac{x\pi}{3-3x}$.

   Ověříme platnost vztahu $f(f^{-1}(x)) = x$.

   $f(f^{-1}(x)) = \frac{3\frac{x\pi}{3-3x}}{3\frac{x\pi}{3-3x}+\pi} = \frac{\frac{x\pi}{1-x}}{\frac{x\pi+\pi-x\pi}{1-x}} = x.\checkmark$

3. $D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad \Longrightarrow \quad$ definiční obor není symetrický, proto není třeba vyšetřovat paritu funkce (není ani sudá, ani lichá). $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} = 0$. Body podezřelé z extrémů: $x = 1$ nebo $x = 3$.

$(-\infty,1)$	$[1,0]$	$(1,2)$	$x=2$	$(2,3)$	$[3,4]$	$(3,\infty)$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

   $f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)-(x-3)(x-1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3} = 0$. Nemá body podezřelé z inflexe.

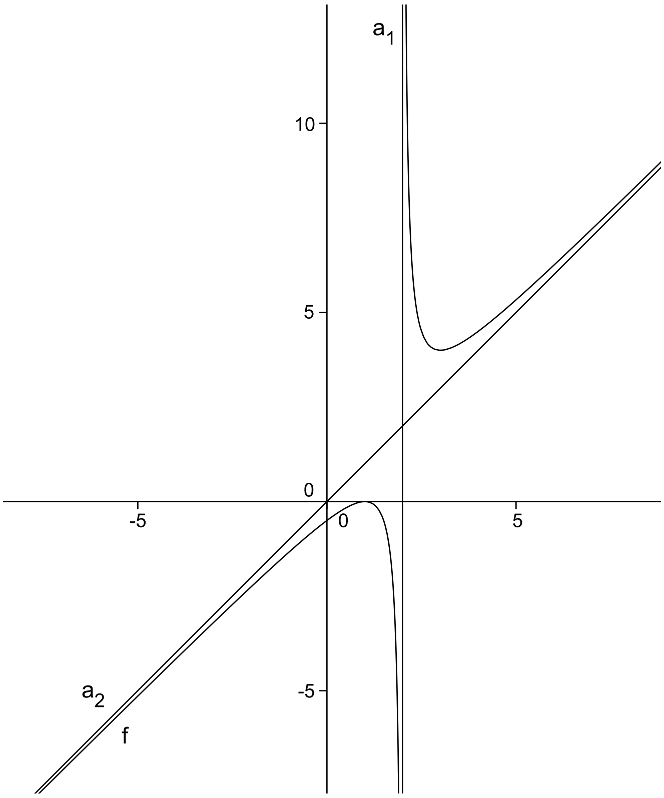
$(-\infty,2)$	$x=2$	$(2,\infty)$
$\frown$		$\smile$

   ABS: $\lim_{x\to 2^-} x + \frac{1}{x-2} = -\infty$, hspace5mm $\lim_{x\to 2^+} x + \frac{1}{x-2} = \infty$.

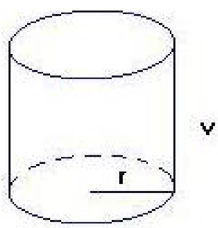
$$a_1 : x = 2$$

   ASS: $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{1}{x-2}}{x} = 1$ $q = \lim_{x\to\pm\infty} x + \frac{1}{x-2} - x = 0$.

$$a_2 : y = x.$$



Obrázek 11.2: Graf funkce $f: y = x + \frac{1}{x-2}$



4. Víme, že $V = \pi r^2 v = 2 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{2}{\pi r^2}$
   $S = 2\pi r(r+v) = 2\pi r(r + \frac{2}{\pi r^2}) = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}$.
   Pokud má být obsah extrémní, musí platit:
   $S' = 4\pi r - \frac{4}{r^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.
   Po dosazení pak $v = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$.
5. Vytipujeme čísla r a s: $r| - 2 \Rightarrow r = 1, -1, 2, -2$; $s|3 \Rightarrow s = 1, 3$.

   $\frac{r}{s}: \qquad -1, \frac{-1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, -2, \frac{-2}{3}$.

$\frac{r}{s}$:	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{3}$		
$r+s$:	0	2	2	4	3	5	-1	1	$P(-1) = -15$
$r-s$:	-2	-4	0	-2	1	-1	-3	-5	$P(1) = 1$

   Z tabulky je zřejmé, že není nutné vyšetřovat všechny hodnoty, ale pouze $\frac{2}{3}, 2$.

   Hornerovo schéma:

	3	-5	5	-2
2	3	1	7	$\boxed{12}$
$\frac{2}{3}$	3	-3	3	$\boxed{0}$
$\frac{2}{3}$	3	-1	$\boxed{\frac{7}{3}}$	

   $P(x)$ lze rozložit v $\mathbb{R}$ následovně: $P(x) = (x - \frac{2}{3})(3x^2 - 3x + 3)$. (Trojčlen $3x^2 - 3x + 3$ není v $\mathbb{R}$ rozložitelný.)

Řešení: **11.0.4.** (VARIANTA C)

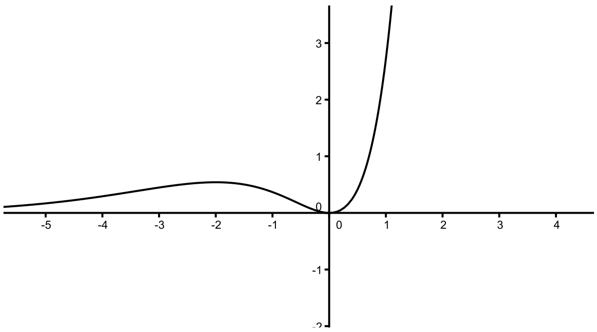
1. $y = x^2 e^x \qquad D_f = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad$ nemá ABS.
   $f(-x) = x^2 e^{-x} \neq f(x) \neq -f(x) \Rightarrow \quad$ ani sudá ani lichá.
   $y' = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \vee x = 0.$

$(-\infty,-2)$	$[-2, 4e^{-2}]$	$(-2,0)$	$[0,0]$	$(0,\infty)$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

   $y'' = (2+2x)e^x + (2x+x^2)e^x = e^x(x^2+4x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2-\sqrt{2} \vee x = -2+\sqrt{2}.$

$(-\infty,-2-\sqrt{2}\rangle$	$[-2-\sqrt{2}, f(-2-\sqrt{2})]$	$\langle -2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\rangle$	$[-2+\sqrt{2}, f(-2+\sqrt{2})]$	$\langle -2+\sqrt{2}, \infty)$
$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

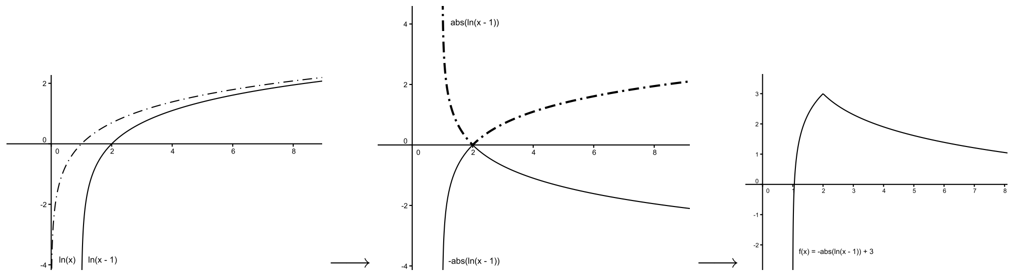
   ASS:
   $k_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ v $+\infty$ nemá ASS.
   $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2e^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ $q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$
   $a : y = 0.$

   Obrázek 11.3: Graf funkce $f : y = x^2 e^x$

2. Označme P příjem z prodeje vstupenek. Funkce $P(x)$ udává závislost příjmu ku počtu navýšených stokorun oproti základní ceně. Pak
   $P(x) = (800-20x)(1000+100x) = 800000 + 60000x - 2000x^2$
   $P'(x) = 60000 - 4000x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 15.$
   Pro maximální zisk je nutno navýšit cenu vstupenky o 15 stokorun. Optimální cena vstupenky je tak 2500 Kč.

3. Tečna t je rovnoběžná s přímkou $p : y = 2x + 6$, právě když mají směrnice stejnou hodnotu ($k_t = k_p = 2$). Směrnici tečny ke grafu funkce lze najít jako hodnotu derivaci funkce v bodě dotyku: $k_t = f'(T) = (\frac{-2}{x^3})_T = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$
   Tedy hledaný bod křivky je $T = [-1, 1]$.

4. 

5. Funkce $f(x) = \frac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x}$ není definována pro x pro něž platí: $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 = x(x-3)(x+1)$. Odtud body nespojitosti $x = -1, x = 0, x = 3$.

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x(x+1)^2}{x(x-3)(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x-3} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x-3} = -\frac{1}{3}.$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x} = \frac{48}{0} \qquad \Rightarrow$ Je nutné vyšetřit jednostranné limity.

$\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x} = +\infty.$

Jednostranné limity si nejsou rovny, proto limita neexistuje.

Řešení: **11.0.5.** (VARIANTA D)

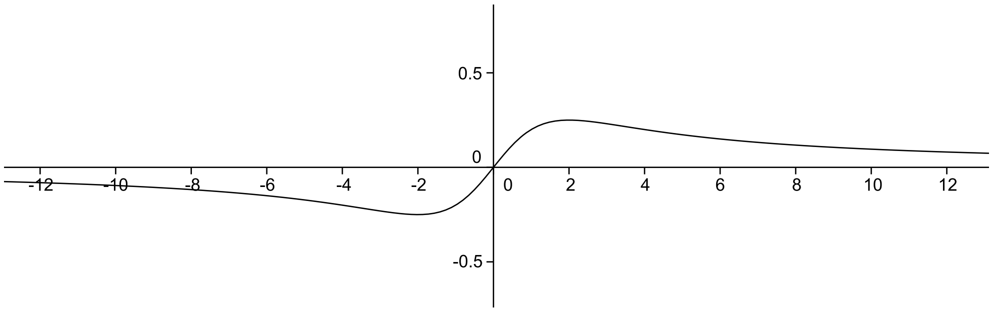
1. $y = \frac{x}{4+x^2}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad$ nemá ABS.
   $f(-x) = \frac{-x}{4+x^2} = -f(x) \Rightarrow$ funkce je lichá.
   $y' = \frac{4+x^2-x2x}{(4+x^2)^2} = \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad x = -2 \vee x = 2.$

$(-\infty,-2)$	$[-2,-\frac{1}{4}]$	$(-2,2)$	$[2,\frac{1}{4}]$	$(2,\infty)$
$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

   $y'' = \frac{-2x(4+x^2)^2-(4-x^2)2(4-x^2)2x}{(4+x^2)^4} = \frac{x(x^2-12)}{(4+x^2)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = 2\sqrt{3}.$

$(-\infty,-2\sqrt{3}\rangle$	$[-2\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{8}]$	$\langle -2\sqrt{3},0\rangle$	$[0,0]$	$\langle 0,2\sqrt{3}\rangle$	$[2\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{8}]$	$\langle 2\sqrt{3},\infty)$
$\frown$	IB	$\smile$	IB	$\frown$	IB	$\smile$

   ASS:
   $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{4+x^2}}{x} = 0$ $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{4+x^2} = 0.$ $a_1 : y = 0.$



Obrázek 11.4: Graf funkce $f : y = \frac{x}{4+x^2}$

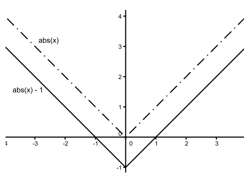
2. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(1-2x)(x^2+5x+6)}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3+\dots}{x^3+8} = -2$

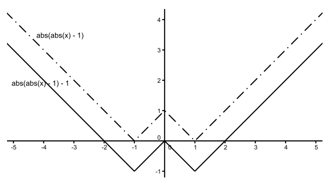
   (b) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{(1-2x)(x^2+5x+6)}{x^3+8} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{(1-2x)(x+2)(x+3)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{(1-2x)(x+3)}{x^2-2x+4} = \frac{5}{12}.$

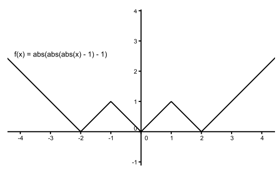
3. Nejprve dopočítáme y-ovou souřadnici bodu $T : f(8) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2} \quad (T[8,\frac{5}{2}])$.
   Směrnice tečny je hodnota první derivace funkce v bodě dotyku, tedy

$$k_t = f'(8) = [\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{3} - \frac{x^{\frac{-4}{3}}}{3}]_8 = \frac{1}{3}(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}) = \frac{1}{16}.$$

   $t : y = \frac{1}{16}x + q$, navíc víme, že $T \in t$ a odtud po dosazení za x a y dostáváme rovnici tečny $t : y = \frac{1}{16}x + 4$.
   Pro směrnici normály v bodě T platí $k_t \cdot k_n = -1$, tedy $k_n = -16$. Stejným postupem jako u tečny dostáváme rovnici normály $n : y = -16x + \frac{261}{2}$.

4. 

$\longrightarrow$ 

$\longrightarrow$ 

5. Víme, že objem bazénu $V = a^2b = 32 \quad \Longrightarrow$ 3mm $b = \frac{32}{a^2}$
   Povrch bazénu se skládá z povrchu jeho čtyř stěn a čtvercového dna,
   tedy $S = 4ab + a^2 = 4\frac{32}{a} + a^2$.