Kapitola 12

Úlohy k procvičování

Následující stránky obsahují úlohy k samostatnému procvičování. Jsou seřazeny dle kapitol studijního textu. V průběhu semestru budou dále doplňovány na základě aktuálních potřeb tak, aby umožnily studentům dostatečné procvičení studované oblasti matematiky. Z těchto příkladů budou v generovány také testy ke kolokviu. Vzhledem k rozsahu baterií úloh, není nezbytné propočítat všechny úlohy. Je plně postačující spočítat 3-4 příklady daného typu. Přejeme hodně úspěchů při jejich řešení.

12.1 Výrazy

❓ Úlohy

Úloha 12.1.1 Zjednodušte algebraické výrazy a určete, pro které hodnoty mají smysl.

a) $\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{x^2}{y}+x+y\right):\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)$ b) $\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\frac{x^3}{a^3-x^3}$
c) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}-\frac{3}{x^2+x+1}\right)\left(x+\frac{2x+1}{x-1}\right)$ d) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{2a-2b}$
e) $\left(\left(1-\frac{2}{1-3x}\right)\left(1-\frac{9x-9x^2}{3x+1}\right)\right):\left(1-9x^2\right)$ f) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{\sqrt{b^3}}}\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}$
g) $\frac{\sqrt[3]{a^{-2}}\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a^{-3}}}}$ h) $\sqrt{ab}\sqrt[3]{4a^2b^4}\sqrt[4]{8a^3b^7}\ \sqrt[12]{2a^3b^9}$

Řešení. a) $\dfrac{x^2}{x-y}, x\neq 0, y\neq 0, x\neq \pm y$; b) $-1, x\neq 0, x\neq a$; c) $1, x\neq 1$; d) $\dfrac{x^2+y^2}{x}, x\neq 0, x\neq \pm y$; e) $-\dfrac{1}{1+3x}, x\neq \pm\dfrac{1}{3}$; f) $\sqrt{a}, b>0, a\neq 0$; g) $1, a>0$; h) $\sqrt{8}\sqrt[6]{a^{13}}\sqrt[3]{b^{13}}, a>0, b>0$. ♣

Úloha 12.1.2 Vypočítejte hodnoty polynomu $f(x)=4x^5+2x^4+11x^2+x-6$ v bodech $x=-1$, $x=2$, $x=0,5$.

Řešení. $f(-1)=2;\ f(2)=200;\ f(0,5)=-2,5$. ♣

Úloha 12.1.3 Najděte všechny reálné kořeny polynomů a ověřte je Hornerovým schématem.

a) $P(x)=x^4-4x^3-10x^2+28x-15$ b) $P(x)=x^5-8x^3-x^2+12x-4$
c) $P(x)=x^5+x^4-5x^3-9x^2-24x-36$ d) $P(x)=x^5+2x^4-13x^3-26x^2-36x-72$
e) $P(x)=x^7-2x^6-4x^5+6x^4+7x_3-4x_2-4x$ f) $P(x)=x^6-4x^5-6x^4+32x^3+x_2-60x+36$
g) $P(x)=21x^3-25x^2+3x+1$ h) $P(x)=18x^4+9x^3-17x^2-4x+4$

Řešení. a) $x_{1,2} = 1, x_3 = 3, x_4 = 5$; b) $x_{1,2} = -2, x_3 = 1, x_{4,5} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; c) $x_{1,2} = -2, x_3 = 3$; d) $x_1 = -3, x_{2,3} = -2, x_4 = 2, x_5 = 3$; e) $x_{1,2,3} = -1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_{6,7} = 2$; f) $x_{1,2} = -2, x_{3,4} = 1, x_{5,6} = 3$; g) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{7}, x_3 = 1$; h) $x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$. ♣

Úloha 12.1.4 Vydělte polynom $f(x)$ polynomem $g(x)$:

a) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2$, $g(x) = x^2 + 4$;

b) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 3$, $g(x) = 2x + 1$;

c) $f(x) = x^3 + 6x + 3$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$;

d) $f(x) = x^3 - 8x + 2$, $g(x) = x + 3$;

Řešení. a) $\dfrac{2x^4 - x^3 + 9x^2}{x^2 + 4} = 2x^2 - x + 1 + \dfrac{4x - 4}{x^2 + 4}$; b) $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1} = 2x^2 - 1 - \dfrac{2}{2x + 1}$; c) $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2} = x + 2 + \dfrac{8x - 1}{x^2 - 2x + 2}$; d) $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3} = x^2 - 3x + 1 - \dfrac{1}{x + 3}$. ♣

Úloha 12.1.5 Ukažte, že číslo $x = 3$ je kořen polynomu $f(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15$ a určete všechny další kořeny tohoto polynomu.

Řešení. Všechny kořeny polynomu jsou $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{6}$. ♣

Úloha 12.1.6 Rozložte výrazy na parciální zlomky

a) $\dfrac{x + 3}{x^2 + x - 2}$

b) $\dfrac{x}{(x - 1)(x^2 + 2)}$

c) $\dfrac{2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

d) $\dfrac{2x^2 + x + 1}{x^4 - x^2}$

e) $\dfrac{x^3 + x + 1}{x(x + 1)^2}$

f) $\dfrac{3x^3 + 5x^2 - 25x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

g) $\dfrac{2x^2 - 3x + 3}{(x)^3 - 2x^2 + x}$

h) $\dfrac{1}{((x)^2 + 1)(x^2 + 4)}$

Řešení. a) $\dfrac{4}{3(x - 1)} - \dfrac{1}{3(x + 2)}$; b) $\dfrac{1}{2(x - 1)} + \dfrac{1 - x}{2(x^2 + 1)}$; c) $\dfrac{x - 2}{2(x^2 + 1)} - \dfrac{1}{2(x - 1)} + \dfrac{3}{2(x - 1)^2}$; d) $\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}$; e) $1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{1}{(x + 1)^2}$; f) $3 + \dfrac{5}{x + 2} - \dfrac{6}{(x - 1)^2}$; g) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{(x - 1)^2} - \dfrac{1}{x - 1}$; h) $\dfrac{3}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{3(x^2 + 4)}$. ♣

12.2 Funkce, elementární funkce

Úloha 12.2.7 Zjistěte,zda je funkce sudá nebo lichá:

a) $f : y = \frac{3-x}{4}$ [ani sudá ani lichá]

b) $f : y = \frac{x^3-x}{x^2}$ [lichá]

c) $f : y = \frac{x^4}{x^2+8}$ [sudá]

Úloha 12.2.8 Zjistěte, za se jedná o prosté zobrazení a nalezněte k němu inverzní zobrazení:

a) $f : y = \frac{3-x}{4}$ $\qquad$ [$f^{-1} : y = 3 - 4x$]

b) $f : y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ [$f^{-1} : y = \frac{1}{x}$]

c) $f : y = x^2 - 4$ pro $x \geq 0$ $\qquad$ [$f^{-1} : y = \sqrt{x+4}$ pro $x \geq -4$]

Úloha 12.2.9 Určete inverzní funci a definiční obor inverzní funkce:

a) $f(x) = 3 - 2^{-x}$ $\qquad$ [$f^{-1}(x) = -\log_2(3-x)$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 3)$]

b) $f(x) = 5 \cdot 2^{(3x-8)}$ $\qquad$ [$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(8 + \log_2 \dfrac{x}{5}\right)$, $D(f^{-1}) = (0, \infty)$,]

c) $f(x) = \dfrac{10}{2+3^x}$ $\qquad$ [$f^{-1}(x) = \log_3 \left(\dfrac{10}{x} - 2\right)$, $D(f^{-1}) = (0, 5)$;]

d) $f(x) = \dfrac{4}{1-2^x}$ $\qquad$ [$f^{-1}(x) = \log_2 \left(1 - \dfrac{4}{x}\right)$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$;]

Úloha 12.2.10 Z daných zobrazení utvořte složená zobrazení $F_1 = f \circ g$, $F_2 = g \circ f$, $F_3 = f \circ f$, $F_4 = g \circ g$. Určete definiční obory těchto složených zobrazení:

a) $f : y = 6x - 5, \quad g : y = \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ b) $f : y = x^3 + 2, \quad g : y = \sqrt[3]{2x}$

c) $f : y = \dfrac{1}{x}, \quad g : y = 2x + 4$ $\qquad$ d) $f : y = \dfrac{x}{x+1}, \quad g : y = 1 - 2x$

e) $f : y = \sqrt[3]{x}, \quad g : y = \sqrt[4]{x}$ $\qquad$ f) $f : y = \dfrac{1}{x+2}, \quad g : y = \sqrt[3]{x}$

Řešení: a) $F_1 = 3x - 5$, $F_2 = 3x - 5/2$, $F_3 = 36x - 35$, $F_4 = x/4$, $DF_1 = DF_2 = DF_3 = DF_4 = \mathbb{R}$;

b) $F_1 = 2x + 2$, $F_2 = \sqrt[3]{2x^3 + 4}$, $F_3 = (x^3 + 2)^3 + 2$, $F_4 = \sqrt[3]{2}\sqrt[9]{2x}$, $DF_1 = DF_2 = DF_3 = DF_4 = \mathbb{R}$;

c) $F_1 = \dfrac{1}{2x+4}$, $F_2 = \dfrac{2}{x} + 4$, $F_3 = x$, $F_4 = 4x + 12$, $DF_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$, $DF_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, $DF_3 = DF_4 = \mathbb{R}$;

d) $F_1 = \dfrac{1-2x}{2-2x}$, $F_2 = \dfrac{1-x}{1+x}$, $F_3 = \dfrac{x}{2x+1}$, $F_4 = 4x - 1$, $DF_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$, $DF_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$, $DF_3 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1/2\}$, $DF_4 = \mathbb{R}$;

e) $F_1 = F_2 = \sqrt[12]{x}$, $F_3 = \sqrt[9]{x}$, $F_4 = \sqrt[16]{x}$, $DF_3 = \mathbb{R}$, $DF_1 = DF_2 = DF_4 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$;

f)$F_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+2}$, $F_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$, $F_3 = \dfrac{x+2}{2x+5}$, $F_4 = \sqrt[9]{x}$, $DF_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -8\}$, $DF_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$, $DF_3 = DF_4 = \mathbb{R}$.

12.3 Kvadratické a mocninné funkce

Úloha 12.3.11 Načrtněte grafy funkcí a určete jejich definiční obor a obor hodnot:

a) $f : y = -3x + 7$ [Df = $\mathbb{R}$, Hf=$\mathbb{R}$]

b) $f : y = -2x^2 + 3$ [Df == $\mathbb{R}$, Hf=$(-\infty, 3)$]

c) $f : y = (x + 4)^{\frac{3}{2}}$ [Df =$[-4, \infty)$, Hf=$(8, \infty)$]

Úloha 12.3.12 Využitím grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ a operací s grafy funkcí zakreslete grafy funkcí:

a) $h(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ b) $g(x) = \dfrac{2-x}{3x}$ c) $p(x) = \dfrac{10x+3}{10x-3}$ d) $f(x) = \dfrac{4x}{4x+7}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{5-x}$

Úloha 12.3.13 Využitím grafu funkce $f(x) = \sqrt{x^3}$ a operací s grafy funkcí zakreslete grafy funkcí:

a) $h(x) = \sqrt{x^3+2}$ b) $g(x) = \sqrt{x^3} - 3$ c) $p(x) = 4\sqrt{x^3}$ d) $q(x) = \sqrt{x^3+1}$ e) $r(x) = 2\sqrt{x^3-1} + 3$

12.4 Logaritmické a exponenciální funkce

Úloha 12.4.14 Řešte exponenciální rovnice:

a) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 7;$ b) $0,4^{1-x} = 2,5^{x+2};$ c) $4^x - 4^{1+x} = 120;$
d) $0,2^{x+1} \cdot 0,3^x = 10;$ e) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0;$ f) $3^x + 3^{-x} = 4.$

Řešení: a) $x = 1$; b) nemá řešení; c) nemá řešení; d) $x = \log_{0,06} 50$; e) $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$; f) $x_1 = \log_3(2+\sqrt{3})$, $x_2 = -x_1 = \log_3(2-\sqrt{3})$

? Úlohy

Úloha 12.4.15 Řešte exponenciální nerovnice:

a) $2^{3x-8} \geq 1;$ b) $0,2^x > 5^{3x};$ c) $4^x \cdot 2^{2x+1} \leq 100;$
d) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^x \cdot 3^{x-1} > 1;$ e) $4^{x+5} < 16^{1-x};$ f) $3^{x+1} + 3^{x+2} < 48;$
g) $25^x - 5 \cdot 5^x + 6 < 0;$ h) $|2^x - 1| > 4.$

Řešení: a) $x \geq 8/3$; b) $x < 0$; c) $x \leq \dfrac{1}{4} \cdot \log_2 50$; d) $x < \log_{6/7} 3$; e) $x < -1$; f) $x < \log_3 4$; g) $x \in (\log_5 2, \log_5 3)$; h) $x > \log_2 5$

? Úlohy

Úloha 12.4.16 Řešte logaritmické rovnice:

a) $\log_4(2+5x) = -2;$ b) $\log_2(x+7) - \log_2 x = 3;$ c) $\log_2(\log_3 x) = -3;$
d) $\ln x^2 = \ln(10 - x^2);$ e) $\dfrac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} = 10;$ f) $\log_8 \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -1.$

Řešení: a) $x = -\dfrac{31}{80}$; b) $x = 1$; c) $x = \sqrt[8]{3}$; d) $x = \pm\sqrt{5}$; e) $x = 3^{-10/9}$; f) nemá řešení

? Úlohy

Úloha 12.4.17 Řešte logaritmické nerovnice:

a) $\log_3(x-1) > 2;$	b) $1 + \log_3(4-x) \le 0$	c) $\log_{1/2}(x+6) \le 0;$
d) $\log_{1/3}(x-1) > 3;$	e) $\dfrac{1}{1+2\ln x} > 1;$	f) $\log\lvert x\rvert > 10;$
g) $\lvert\log x\rvert \le 1;$	h) $\lvert\log_2(1-x)\rvert > 3;$	i) $\lvert 1-\ln x\rvert < 2;$

j) $\log_5^2 x + 2\log_5 x - 3 < 0.$

Řešení: a) $x > 10$; b) $x \in \langle \frac{11}{3}, 4)$; c) $x \ge -5$; d) $x \in (1, \frac{28}{27})$; e) $x \in (e^{-1/2}, 1)$; f) $|x| > 10^{10}$; g) $x \in \langle 0,1;\ 10\rangle$; h) $x \in (-\infty, -7) \cup (7/8, 1)$; i) $x \in (1/e, e^3)$; j) $x \in (1/125, 5)$

12.5 Goniometrické a hyperbolické

? Úlohy

Úloha 12.5.18 Řešte v množině $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{17}{24}\pi + k\pi, \frac{25}{24}\pi + k\pi\}]$
b) $2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + 6k\pi, \frac{3}{2}\pi + 6k\pi\}]$
c) $\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + k\pi\}]$
d) $\cos(4x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{-\frac{1}{12}\pi + k\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi + k\frac{1}{2}\pi\}]$
e) $\mathrm{tg}(2x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\frac{1}{2}\pi\}]$
f) $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{cotg}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{11}{4}\pi + 3k\pi\}]$
g) $2\sin^2 x = \sqrt{2}\sin x$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi, \frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\}]$
h) $2\cos^2 x = -\sqrt{2}\cos x$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\}]$
i) $\mathrm{tg}^2 x = -\mathrm{tg} x$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\}]$
j) $\sqrt{3}\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg} x - \sqrt{3} = 0$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\}]$
k) $3\mathrm{tg}^2 x + 4\sqrt{3}\mathrm{tg} x + 3 = 0$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}]$
l) $2 - 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{k\pi, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\}]$
m) $\sin 2x - \cos x = 0$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}]$
n) $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi,\}]$
o) $\sin 4x = \sqrt{2}\cos 2x$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{8}\pi + k\pi, \frac{3}{8}\pi + k\pi\}]$
p) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{12}\pi + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi,\}]$
q) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}]$
r) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$	$[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \{\frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi,\}]$

s) $\text{cotg}^2 x + (\sqrt{3}-1)\text{cotg} x = \sqrt{3}$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi, \}]$

t) $3^{4\sin^2 x} = 27$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\frac{1}{3}\pi + k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi, \}]$

u) $\cos 2x - \cos x = \sin x - \sin 2x$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{2k\pi, \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \}]$

v) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{5}{6}\pi + k\pi\}]$

w) $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\frac{3}{4}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi, 2k\pi\}]$

x) $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}]$

y) $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - 4\text{tg} x = 0$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\frac{1}{6}\pi + k\pi, \frac{1}{3}\pi + k\pi\}]$

z) $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$ $[\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\}]$

12.6 Posloupnosti a limity posloupností

❓ Aritmetická a geometrická posloupnost

V následujících zadáních znamená zkratka AP aritmetickou posloupnost a GP geometrickou posloupnost.

Úloha 12.6.19 Tři za sebou následující členy AP mají součet 21 a součin 315. Určete tato čísla.

$[5, 7, 9]$

Úloha 12.6.20 Tři za sebou následující členy GP mají součet 49/2 a součin 343. Určete tato čísla.

$[7/2, 7, 14]$

Úloha 12.6.21 Vložte pět čísel mezi 6 a 30 tak, aby tvořily 7 za sebou jdoucích členů AP

$[6, 10, 14, 18, 22, 26, 30]$

Úloha 12.6.22 Vložte čtyři čísla mezi 243 a 1 tak, aby tvořily 6 za sebou jdoucích členů GP.

$[243, 81, 27, 9, 3, 1]$

Úloha 12.6.23 První tři členy GP jsou $k-3, 2k-4, 4k-3$ v tomto pořadí. Určete hodnotu k a součet prvních osmi členů této posloupnosti.

$[k = 7, s_8 = 4066,3467]$

Úloha 12.6.24 V jisté AP je součet prvního a pátého členu 18 a pátý člen je o 6 větší než třetí člen. Určete součet prvních deseti členů.

$[165]$

Úloha 12.6.25 Určete, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$rostoucí, klesající a omezená. Určete také a_{50}.

a) $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ [klesající, omezená, $a_{50} = \frac{1}{2550}$]

b) $\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ [rostoucí, omezená, $a_{50} = \frac{99}{51}$]

Úloha 12.6.26 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_2 + a_3 = 9, a_2 \cdot a_3 = 14$. Určete a_{10}.

[$a_{10} = -33$ nebo $a_{10} = 42$]

Úloha 12.6.27 V aritmetické posloupnosti je dáno:

a) $a_4 = 0, a_6 = -4, s_n = 12$, určete n. [$n = 3 \vee n = 4$]

b) $a_1 + a_4 = 26, a_2 + a_5 = 30$, určete s_{10}. [$s_{10} = 190$]

Úloha 12.6.28 Mezi čísla 1 a 25 vložte tolik čísel, aby spolu s danými čísly tvořila počátek aritmetické posloupnosti a aby součet daných a vložených čísel byl 117.

[$4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$]

Úloha 12.6.29 Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů

a) aritmetické posloupnosti, [$2;\ 3,2;\ \ldots;\ 8$ nebo $8;\ 6,8;\ \ldots;\ 2$]

b) geometrické posloupnosti. [$2, 2\sqrt[5]{4}, \ldots, 8$ nebo $8, 4\sqrt[5]{4}, \ldots, 2$]

Úloha 12.6.30 Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže:

a) $a_2 = 16, a_4 = 1$, [$a_1 = 64, q = \frac{1}{4}$]

b) $a_8 - a_4 = 360, a_7 - a_5 = 144$ [$a_1 = 3, q = 2 \vee a_1 = -3072, q = \frac{1}{2}$]

c) $a_1 - a_2 + a_3 = 15, a_4 - a_5 + a_6 = 120$ [$a_1 = 5, q = 2$]

Úloha 12.6.31 Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete toto číslo.

[je to číslo 3]

Úloha 12.6.32 V geometrické posloupnosti je $a_1 = 3$. Určete všechna $q \in \mathbf{R}$ tak, aby $s_3 \leq 21$.

[$q \in \langle -3, 2 \rangle$]

Úloha 12.6.33 Součet čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete je, jestliže víte, že poslední je devětkrát větší než druhý.

[$2, 6, 18, 54$ nebo $-4, 12, -36, 108$]

Úloha 12.6.34 Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují nerovnici

$$(12x + \frac{2}{3}) \cdot 5 - \frac{5x - 15}{3} < 50(x + 10).$$

[$s_{58} = 1682$]

Úloha 12.6.35 Vypočítejte součet všech přirozených dvojciferných čísel.

[$s = 4905$]

Úloha 12.6.36 Spojením středů stran čtverce s délkou strany a vznikne další čtverec, z toho lze stejným způsobem sestrojit třetí atd. Jak velký je obsah čtverce vzniklého desátým dělením? Kolikrát nejméně musíme konstrukci opakovat, aby konečný čtverec měl alespoň 100-krát menší obsah než čtverec původní?

[$\frac{a^2}{1024}$, sedmkrát]

Úloha 12.6.37 Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Ukažte, že jsou v poměru $3 : 4 : 5$.

[je to snadné]

Úloha 12.6.38 V aritmetické posloupnosti 30, 27, 24, 21, ... Najděte člen a_n, který se rovná jedné osmině součtu s_{n-1} všech předcházejících členů.

[dvě řešení $a_{33} = -66, a_6 = 15$]

Úloha 12.6.39 Dluh byl splácen v měsíčních splátkách, které tvořily geometrickou posloupnost: 1000Kč, 250Kč, ... Po kolika měsících klesne splátka pod 2Kč?

[šestá splátka]

Limity posloupností

Úloha 12.6.40 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{n}$ [2]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$ [$\frac{1}{2}$]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{3n^2-5}$ [$\frac{2}{3}$]

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^4+1}$ [0]

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100n^5+1}{n^5+2n^2+3}$ [100]

Úloha 12.6.41 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$ [3]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^2+(3n-1)^3}{(n+1)^2-(2n+3)^3}$ [$-\frac{7}{8}$]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+1}{2n^3+14n-100}\right)^3$ [$\frac{1}{8}$]

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^4-n^3+166}{6n^4+2n-77}\right)^{-2}$ [4]

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$ [$\frac{15}{17}$]

Úloha 12.6.42 Vypočtěte (připomeňme, že $n! = n.(n-1).(n-2)\dots 3.2.1$):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$ [0]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ [1]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ [0]

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n-1)!}{(2n+1)!-(2n-1)!}$ [1]

Úloha 12.6.43 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{-n}}{1+3^{-n}}$ [0]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ [1]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+4^{n+1}}{2^n+4^n}$ [4]

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ [$\frac{1}{3}$]

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$ [0]

Úloha 12.6.44 Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n^2}$ [1]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$ [0]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n-\sqrt{n^2-n}}$ [2]

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ [$\frac{1}{2}$]

Úloha 12.6.45 Vypočtěte (při úpravách výrazů použijte vzorce pro součet prvních n členů aritmetické, resp. geometrické posloupnosti):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$ [$-\frac{1}{2}$]

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ [$\frac{1}{2}$]

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\ldots+\dfrac{1}{(-10)^n}\right)$ [$-\frac{1}{11}$]

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$ [$\frac{4}{3}$]

12.7 Limity funkce

❓ Úlohy

Úloha 12.7.46 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$ [8]

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ [−4]

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-2x-4}$ [$\frac{2}{3}$]

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ [−1]

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}$ [−4]

f) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{5x+6-x^2}{7x-6-x^2}$ [$\frac{7}{5}$]

g) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \frac{x^4+x^2-12}{x^4-2x^2-3}$ [$\frac{7}{4}$]

Úloha 12.7.47 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ [12]

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+6x-9}{x^3-1}$ [4]

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$ [3]

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-3x^2-4}{x^3-4x}$ [$\frac{3}{2}$]

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+3x+2}$ [−5]

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-x^2}{2x^5-3x^4+5x^3-2x^2}$ [$\frac{1}{2}$]

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-2x^2}{x^6+3x^4-2x^2}$ [1]

Úloha 12.7.48 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right)$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{12}{8+x^3}\right)$ [$-\frac{1}{2}$]

c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3-3x^2-9x-5}$ [0]

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$ [$-\frac{1}{2}$]

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2-2}{x^3+2x+3}$ [$-\frac{3}{5}$]

Úloha 12.7.49 Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{3x}$ [$\frac{1}{18}$]

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$ [$-\frac{1}{2}$]

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ [4]

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ [32]

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{x+2}$ [$-\frac{1}{4}$]

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$ [neex.]

Úloha 12.7.50 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-5\sin x+2}$ [-1]

b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos^2 x-2\cos x-3}{\cos^2 x-4\cos x-5}$ [$\frac{2}{3}$]

Úloha 12.7.51 Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$ [$-\frac{\sqrt{2}}{2}$]

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ [$-\frac{\sqrt{2}}{2}$]

c) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ [2]

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ [0]

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\text{cotg}\, x - 1}$ [-1]

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos 2x}$ [1]

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{1 - \cos 2x}$ [2]

Úloha 12.7.52 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}^{\,2} x}{1 - \sqrt{\cos 2x}}$ [1]

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{3} - \sqrt{2 + \cos x}}$ [$4\sqrt{3}$]

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x}{\sqrt{1 - \sin x} - \sqrt{1 + \sin x}}$ [-1]

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}$ [$-2\sqrt[4]{2}$]

e) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x + 2}}{\sin^2 2x}$ [$-\frac{1}{16}$]

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x - \cos 2x}{\sqrt{2\sin x} - 1}$ [4]

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x - 1}$ [$-\infty$]

h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{1 - \sin x}$ [$+\infty$]

Úloha 12.7.53 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ [2]

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{4x^2}$ [$\frac{1}{4}$]

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x + x}{10x}$ [$\frac{1}{10}$]

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1 + \sin 2x}{x}$ [2]

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ [2]

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x - \sin 2x}{x}$ [-1]

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $[\frac{1}{2}]$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x+\sin 3x}{x}$ $[4]$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x+\sin 8x}{4x}$ $[3]$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ $[8]$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ $[1]$

Úloha 12.7.54 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3x-4}{1-5x^2}$ $[-\frac{1}{5}]$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+7x-2}{6x^3-4x+3}$ $[0]$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(1-2x)^2(x-3)}{x^2-7x+10}$ $[+\infty]$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^{x+3}+4}{2^{x-1}+1}$ $[16]$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}+3\sqrt{x^2-6}}{2x+1}$ $[\frac{3}{2}]$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}$ $[-\infty]$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log x+18}{2\log x-17}$ $[\frac{1}{2}]$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$ $[5^{-5}]$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+1}$ $[0]$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+5x})$ $[-\frac{5}{2}]$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x-\sqrt{4x^2+3x})$ $[-\frac{3}{4}]$

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ $[1]$

Úloha 12.7.55 Vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{5n}$ $[e^{-5}]$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{n+2}{1+n}\right)^{n}$ [e]

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{n}{2+n}\right)^{3n}$ [e^{-6}]

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+2}$ [e^{3}]

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{n}{2+n}\right)^{n+1}$ [e^{-2}]

f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+n)^{\frac{2}{n}}$ [e^{2}]

12.8 Spojitost funkce

? Úlohy

Úloha 12.8.56 Určete body nespojitosti funkce a klasifikujte je.

a) $f_1 = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ [$x=-2,$ odstranitelná]

b) $f_2 = \dfrac{x^2 - +5x+6}{x^2+2x}$ [$x=-2,$ odstranitelná; $x=0,$ druhého druhu]

c) $f_3 = \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^3-2x^2-3x}$ [$x=-1, x=0,$ odstranitelná; $x=3,$ druhého druhu]

d) $f_4 = 2^x + 2^{-x}$ [spojitá na celém definičním oboru]

e) $f_5 = e^{\frac{1}{x}}$ [$x=0,$ druhého druhu]

f) $f_6 = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ [$x=0,$ prvního druhu, $s=1$]

g) $f_7 = \begin{cases} \frac{x}{|x|-x}, & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$ [$x=0,$ prvního druhu, $s=\frac{1}{2}$]

h) $f_8 = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x<-1 \\ x^2-3 & x\geq -1 \end{cases}$ [spojitá na celém definičním oboru]

i) $f_9 = sgn(\sin x)$ [$x=k\pi, k\in\mathbb{Z},$ prvního druhu, $s=2$]

j) $f_{10} = sgn(x^2-4)$ [$x=\pm 2,$ prvního druhu, $s=2$]

k) $f_{11} = \dfrac{2}{\ln x - 1}$ [$x=e,$ druhého druhu]

Úloha 12.8.57 Najděte takové hodnoty konstanty C, pro které je daná funkce spojitá na celém definičním oboru.

a) $g_1 = \begin{cases} 2x+4, & x<1 \\ Cx-1 & x\geq 1 \end{cases}$ [$C=7$]

b) $f_7 = \begin{cases} Cx, & x < 1 \\ 2 - \dfrac{x}{C} & x \geq 1 \end{cases}$ [$C = 1$]

c) $f_7 = \begin{cases} Cx - 3, & x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ [$C = 6$]

d) $f_7 = \begin{cases} e^{Cx}, & x < 0 \\ C - x & x \geq 0 \end{cases}$ [$C = 1$]

Úloha 12.8.58 Určete, zda rovnice mají v daném intervalu alespoň jeden kořen.

a) $x^3 - 10x - 5 = 0, \quad , (2, 4)$ [ano]

b) $x^3 - 3x + 1 = 0, \quad , (0, -1)$ [ano]

c) $x^3 + 5x - 1 = 0, \quad , (1, 2)$ [ne]

d) $x^3 + 5x^2 - 1 = 0, \quad , (-1, 1)$ [nelze to vyloučit]

Úloha 12.8.59 Metodou bisekce určete v daných intervalech řešení rovnice s přesností 0,005.

a) $x^3 - x - 1 = 0, \quad , \langle 1, 2 \rangle$ [$1,325$]

b) $x^3 + 5x^2 - 1 = 0, \quad , \langle 0, 1 \rangle$ [0.4258]

c) $x^4 + 5x^3 - 1 = 0, \quad , \langle 0, 1 \rangle$ [0.5664]

Úloha 12.8.60 Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $x^3 > x^2$ [$(1, \infty)$]

b) $x^3 + x^2 - 12x \geq 0$ [$\langle -4, 0 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$]

c) $(x + 1)(x - 3)^2 > 0$ [$(-1, 3) \cup (3, +\infty)$]

d) $\dfrac{4x - x^2}{x + 7} \geq 0$ [$(-7, 0\rangle \cup \langle 4, +\infty)$]

e) $\sqrt{x^2 + 8} > x + 2$ [$(-\infty, 1)$]

f) $x \cdot \log x < x$ [$(0, 10)$]

12.9 Derivace funkce a jejich využití

❓ Úlohy

Úloha 12.9.61 Užitím definice derivace vypočtěte derivaci funkce v daném bodě x_0.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 5, \; x_0 = 3$ [11]

b) $f(x) = x^2 - 4x, \; x_0 = 1$ [-2]

c) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$ [1]

d) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x_0 = 4$ [$-\frac{1}{16}$]

e) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$ [$\frac{1}{2}$]

Úloha 12.9.62 Najděte derivaci funkce v libovolném bodě definičního oboru.

a) $y = 4x^2 - x + 1$ [$y' = 8x - 1$]

b) $y = 2\sin x + 3\cos x$ [$y' = 2\cos x - 3\sin x$]

c) $y = \sqrt{x} + x^{-2}$ [$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x^{-3}$]

d) $y = 6\sqrt[3]{x} - 5$ [$y' = 2\sqrt[3]{x^{-2}}$]

e) $y = 3\ln x - 9\log x$ [$y' = \frac{3}{x} - \frac{9}{x\ln 10}$]

f) $y = \tan x + 11\mathrm{cotg} x$ [$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{11}{sin^2 x}$]

g) $y = 3^x + 2e^x$ [$y' = 3^x \cdot \ln 3 + 2e^x$]

Úloha 12.9.63 Najděte derivaci funkce v libovolném bodě definičního oboru. (Nejprve upravte předpis funkce, pak teprve derivujte.)

a) $y = \dfrac{(x^2+2)^2}{4}$ [$y' = x^3 + 2x$]

b) $y = \dfrac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x})}{x}$ [$y' = -\frac{1}{6 \cdot \sqrt[6]{x^7}}$]

c) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ [$y' = -\sin x + \cos x$]

d) $y = \dfrac{\sin 2x + 1}{\sin x + \cos x}$ [$y' = -\sin x + \cos x$]

Úloha 12.9.64 Derivujte funkce podle pravidel pro derivaci součinu a podílu.

a) $y = x \cdot \sin x$ [$y' = \sin x + x\cos x$]

b) $y = (x^2+1) \cdot \sin x$ [$y' = 2x \cdot \sin x + (x^2+1) \cdot \cos x$]

c) $y = \sin x \cdot \cos x$ [$y' = \cos 2x$]

d) $y = e^x \cdot \ln x$ [$y' = e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}$]

e) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ [$y' = \frac{7}{(x+3)^2}$]

f) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ $[y' = \dfrac{-2}{1 - \sin 2x}]$

g) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{1 - x^3}$ $[y' = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 2x + 2}{(1 - x^3)^2}]$

h) $y = \dfrac{e^x \cdot \ln x}{x + 1}$ $[y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} \cdot (e^x \cdot x \cdot \ln x + e^x + \dfrac{e^x}{x})]$

Úloha 12.9.65 Vypočítejte derivace složených funkcí.

a) $y = (x^2 + 1)^2$ $[y' = 4x \cdot (x^2 + 1)]$

b) $y = (\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^8$ $[y' = \dfrac{24x^2 \cdot (\sqrt{2x^3 - 1} + 2)^7}{\sqrt{2x^3 - 1}}]$

c) $y = \cos(2x + 4)$ $[y' = -2\sin(2x + 1)]$

d) $y = \sqrt{\cos 2x}$ $[y' = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}]$

e) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ $[y' = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}]$

f) $y = \sin^2 x$ $[y' = \sin 2x]$

g) $y = \sin x^2$ $[y' = 2x \cdot \cos x^2]$

h) $y = \sqrt[3]{\cos 2x + 2x}$ $[y' = \dfrac{2 - 2\sin 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(\cos 2x + 2x)^2}}]$

i) $y = \tan(3x - \dfrac{\pi}{4})$ $[y' = \dfrac{3}{\cos^2(3x - \frac{\pi}{4})}]$

j) $y = \ln \sin x$ $[y' = \mathrm{cotg} x]$

k) $y = \sqrt{x + \sqrt{5x}}$ $[y' = \dfrac{2 \cdot \sqrt{5x} + 5}{4 \cdot \sqrt{5x^2 + 5x \cdot \sqrt{5x}}}]$

l) $y = \ln(3\sin x - 8)$ $[y' = \dfrac{3\cos x}{3\sin x - 8}]$

m) $y = e^{\sin x}$ $[y' = e^{\sin x} \cdot \cos x]$

Úloha 12.9.66 Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě T.

a) $y = 2x^4 + 8x,\ T[-1,\ ?]$ $[t : y = -6]$

b) $y = 2\sin x,\ T[0,\ ?]$ $[t : y = 2x]$

c) $y = \dfrac{1 + x^3}{x - 1},\ T[2,\ ?]$ $[t : y = 3x + 3]$

Úloha 12.9.67 Je dána funkce $y = x \cdot \ln x$. Určete bod T grafu funkce tak, aby:

a) tečna v bodě T měla směrnici $k_t = 1$; [$T[1,\ 0]$]

b) tečna v bodě T byla rovnoběžná s přímkou $p : y = 2x + 3$; [$T[e,\ e]$]

c) tečna v bodě T svírala s osou o_x úhel $\alpha = 135^o$; [$T[e^{-2},\ -2e^{-2}]$]

d) tečna v bodě T byla kolmá k přímce $r : y = 6 - 2x$. [$T[\frac{1}{\sqrt{e}},\ -\frac{1}{2\sqrt{e}}]$]

Úloha 12.9.68
Určete, zda limity funkcí lze počítat l'Hospitalovým pravidlem. Pokud ano, vypočítejte je.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-5x+6}$ [-2]

b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-9x}$ [$\frac{1}{54}$]

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ [0]

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{x}$ [$\ln 2$]

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{x^3-4x+3}$ [0]

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{\ln x}$ [∞]

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^4-2x+3}$ [∞]

h) $\lim\limits_{x\to 0+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ [∞]

12.10 Průběh funkce

? Úlohy

Úloha 12.10.69 Vyšetřete monotonii funkce a klasifikujte extrémy

a) $y = x^3 + 3x^2 + 1$ b) $y = x^5 - 5x^4 + 100$ c) $y = \dfrac{(x^2-3x)}{(x+1)}$

d) $y = x \cdot e^x$ e) $y = e^{-x^2}$ f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Řešení.

a) roste na$(-\infty,-2) a (0,\infty)$, klesá na$(-2,0)$, $[-2,5]$lok. max, $[0,1]$lok. min;
b) roste na$(-\infty,0) a (4,\infty)$, klesá na$(0,4)$, $[0,100]$lok. max, $[4,-156]$lok. min;
c) roste na$(-\infty,-3) a (1,\infty)$, klesá na$(-3,-1) a (-1,1)$, $[-3,-9]$lok. max, $[1,-1]$lok. min;
d) roste na$(-1,\infty)$, klesá na$(-\infty,-1)$, $[-1,\frac{-1}{e}]$lok. min;
e) roste na$(-\infty,0)$, klesá na$(0,\infty)$, $[0,1]$lok. max;
f) roste na$(0,e)$, klesá na$(0,\infty)$, $[e,\frac{1}{e}]$lok. max.

Úloha 12.10.70 Vyšetřete konvexnost a konkávnost funkce a určete inflexní body

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ b) $y = x^4 - 4x^3 + 10$ c) $y = \dfrac{(x^2 - 3x)}{(x+1)}$
d) $y = x \cdot e^{-x}$ e) $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ f) $y = \ln(1 + x^2)$

Řešení.

a) konvexní na$\langle \frac{4}{3},\infty)$, konkávní na$(-\infty,\frac{4}{3}\rangle$, IB$[\frac{4}{3},\frac{128}{27}]$;
b) konvexní na$(-\infty,0\rangle, \langle 2,\infty)$, konkávní na$\langle 0,2\rangle$, IB$[0,10], [2,-6]$;
c) konvexní na$(-1,\infty)$, konkávní na$(-\infty,-1)$, IB nemá;
d) konvexní na$\langle 2,\infty)$, konkávní na$(-\infty,2\rangle$, IB$[2,2e^{-2}]$;
e) konkávní na $\mathbb{R}$;
f) konvexní na$\langle -1,1\rangle$, konkávní na$(-\infty,-1\rangle a \langle 1,\infty)$, IB$[\pm 1,\ln 2]$. ♣

Úloha 12.10.71 Nalezněte asymptoty funkcí.

a) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $[ASS: y = x, ABS: x = 0]$

b) $y = \dfrac{2x^2}{x+5}$ $[ASS: y = 2x - 10, ABS: x = -5]$

c) $y = \dfrac{1}{x^2} - x$ $[ASS: y = -x, ABS: x = 0]$

d) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ $[ASS: y = x + 1, ABS: x = 0]$

e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $[ASS: y = 0, ABS: x = 0]$

f) $y = x \cdot \sqrt{3 + x}$ [nemá asymptoty]

Úloha 12.10.72 Vyšetřete průběh funkce a nakreslete její graf.

a) $y = (x+2)^{\frac{5}{3}}$ b) $y = 16x(x-1)^3$ c) $y = x + \frac{4}{x+2}$
d) $y = \frac{x^2}{x-3}$ e) $y = x \cdot \ln x$ f) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

Řešení.
a) $D(f) = \mathbb{R}$, ani sudá ani lichá, $\nearrow naD(f)$, nemá lok. extrémy, konkávní na $(-\infty,-2\rangle$, konvexní na $\langle -2,\infty)$, IB: $[-2,0]$, bez ABS i ASS;
b) $D(f) = \mathbb{R}$,ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(\frac{1}{4},\infty)$, $\searrow$ na $(-\infty,\frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4},-\frac{27}{16}]$ lok. min., konkávní na $\langle \frac{1}{2},1\rangle$, konvexní na $(-\infty,\frac{1}{2}\rangle$ a $\langle 1,\infty)$, IB: $[\frac{1}{2},-1]$, $[1,0]$, bez ABS i ASS;
c) $D(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$,ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(-\infty,-4)$ a $(0,\infty)$, $\searrow$ na $(-4,-2)$ a $(-2,0)$, $[0,2]$ lok. min., $[-4,-6]$ lok. max., konkávní na $(-\infty,-2$,konvexní na $(-2,\infty)$, IB nemá, $y = x$ ASS, $x = -2$ ABS;

d) $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(-\infty, 0)$ a $(6, \infty)$, $\searrow$ na $(0, 3)$ a $(3, 6)$, $[6, 12]$ lok. min., $[0, 0]$ lok. max., konkávní na $(-\infty, 3\rangle$, konvexní na $\langle 3, \infty)$, IB nemá, $y = x + 3$ ASS, $x = 3$ ABS;
e) $D(f) = (0, \infty)$, ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(\frac{1}{e}, \infty)$, $\searrow$ na $(0, \frac{1}{e})$, $[\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ lok. min., konvexní na $D(f)$, IB nemá, bez ABS i ASS;
f) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, ani sudá ani lichá, $\nearrow$ na $(\frac{1}{2}, \infty)$, $\searrow$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}]$ lok. min., konvexní na $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 0, \infty)$, IB nemá, $x = 0$ ABS.

12.11 Optimalizační úlohy

Úloha 12.11.73 Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl minimální.

$[x = 1]$

Úloha 12.11.74 Určete rozměry a, b obdélníku tak, aby při daném obsahu $16\,cm^2$ měl minimální obvod.

[čtverec se stranou $a = 4cm$]

Úloha 12.11.75 Tvrdý papír obdelníkového tvaru má rozměry $60\,cm$ a $28\,cm$. V rozích se vystřihnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana x odstřižených čtverců, aby objem krabice byl maximální?

$[x = 12\,cm]$

Úloha 12.11.76 Obchod prodává skateboardy za 40 dolarů za kus a při této ceně prodá měsíčně 50 skateboardů. Majitel obchodu chce zvýšit cenu a očekává, že každý dolar zvýšení ceny přinese snížení prodeje skateboardů o 2 kusy za měsíc. Jestliže majitel nakupuje skateboardy za cenu 25 dolarů, při jaké prodejní ceně bude jeho měsíční zisk maximální?

$[x = 45\,\$]$

Úloha 12.11.77 Město Bory je 10 km východně od města Akáty a město Cédry je 3 km jižně od města Bory. Z A do C se má postavit silnice, a to tak, že se využije dálnice z A do B, přičemž se do C odbočí v nějakém bodě P na trase A-B. Náklady na přestavbu dálnice jsou 4 miliony Kč na 1 km, zatímco cena na stavbu silnice kdekoliv jinde je 5 milionu Kč na 1 km. Jak daleko od města A se má umístit bod P tak, aby stavba byla co nejlevnější a jaká bude tato cena?

[$6\,km$ od města Akáty, stavba bude stát $49 \cdot 10^6$ Kč]

Úloha 12.11.78 Zjistěte rozměry otevřeného bazénu o daném objemu $32\,m^3$ se čtvercovým dnem tak, aby na vyzdění jeho stěn a dna bylo použito co nejmenší množství materiálu.

$[a = 4\,m, v = 2\,m]$

Úloha 12.11.79 Najděte rovnoramenný trojúhelník, který má při daném obvodu minimální obsah.

[rovnostranný trojúhelník se stranou $a = \dfrac{o}{3}$, o je jeho obvod]

Úloha 12.11.80 Roh v 1. kvadrantu potřebujeme uzavřít závorou délky 20 metrů přes body $[a,\ 0]$, $[0,\ b]$ tak, aby uzavřený segment tvaru trojúhelníku měl maximální plošný obsah. Pro jaké hodnoty a, b to nastane?

$[a = b = 10 \cdot \sqrt{2}\,m]$