



Language: CZECH

2nd Middle European Mathematical Olympiad
Olomouc, Czech Republic

TEAM Competition

8th September 2008

Příklad T-1

Nechť \mathbb{R} značí množinu reálných čísel. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Příklad T-2

Bud' $n \geq 2$ přirozené číslo. Na tabuli je napsáno n čísel. V každém kroku vybereme na tabuli dvě čísla a každé z nich nahradíme jejich součtem. Určete všechna n , pro která můžeme vždy po konečném počtu kroků dostat n stejných čísel.

Příklad T-3

Bud' ABC ostroúhlý trojúhelník a necht' body E, D jsou takové, že body B a E leží v opačných polorovinách určených přímkou AC a bod D leží uvnitř úsečky AE . Dále necht' $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ECD|$ a $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle EBA|$. Dokažte, že body B, C a E leží na jedné přímce.

Příklad T-4

Jestliže je součet kladných dělitelů kladného celého čísla n mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem, pak je i jejich počet mocninou čísla 2 s celočíselným exponentem. Dokažte.

Každá úloha je hodnocena maximálně osmi body.

Problémy jsou řazeny podle oborů, nikoliv podle složitosti.

Čas na řešení: 5 hodin.

Čas na dotazy: 45 minut.