Language: CZECH

2nd Middle European Mathematical Olympiad
Olomouc, Czech Republic

INDIVIDUAL Competition 6th September 2008

Příklad I-1

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných celých čísel taková, že $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \geq 1$. Předpokládejme, že pro libovolnou čtveřici indexů (i, j, k, l), kde $1 \leq i < j \leq k < l$ a $i+l = j+k$, platí nerovnost $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určete nejmenší možnou hodnotu členu a_{2008}.

Příklad I-2

Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Kolika způsoby na ni můžeme rozmístit $2n-2$ identických kamenů (každý kámen leží na jiném poli) tak, že žádné dva kameny neleží na stejné diagonále? (Dva kameny leží na stejné diagonále, jestliže přímka spojující středy odpovídajících polí je rovnoběžná s některou z úhlopříček šachovnice.)

Příklad I-3

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny BC a AC. Kružnice mu vepsaná se dotýká stran AB a BC po řadě v bodech D a E. Přímka různá od AE a procházející bodem A protíná kružnici vepsanou v bodech F a G. Přímka AB pak protíná přímky EF a EG po řadě v bodech K a L. Dokažte, že $|DK| = |DL|$.

Příklad I-4

Nalezněte všechna celá k taková, že čísla $4n+1$ a $kn+1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n.

Každá úloha je hodnocena maximálně osmi body.
Problémy jsou řazeny podle oborů, nikoliv podle složitosti.
Čas na řešení: 5 hodin.
Čas na dotazy: 45 minut.