

28. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Pole čtvercové šachovnice 9×9 jsou obarvena podobně jako na běžné šachovnici 8×8 černou a bílou barvou (všechna rohová pole jsou přitom bílá). Určete nejmenší počet věží, které je možno postavit na tuto šachovnici tak, aby všechna bílá pole byla věžemi ohrožena. (Pole je ohroženo věží, leží-li na stejné řádce nebo sloupci šachovnice jako věž.)

(3 BODY)

2. Rovnice $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ má tři reálné kořeny, které leží v otevřeném intervalu $(0; 2)$. Dokažte, že pro její koeficienty p, q, r platí nerovnost

$$-2 < p + q + r < 0.$$

(4 BODY)

3. Na přímce, která se dotýká dané kružnice k v bodě A , je zvolen bod B ($B \neq A$). Uvažujme otočení se středem totožným se středem kružnice k a libovolným úhlem otočení (různým od celočíselných násobků 360°), které zobrazí úsečku AB na úsečku $A'B'$. Dokažte, že přímka AA' prochází středem úsečky BB' .

(4 BODY)

4. Uvažujme posloupnost nul a jedniček, která je vytvořena následujícím způsobem: k -tým členem uvažované posloupnosti je číslo 0, je-li součet všech číslic čísla k sudé, v opačném případě je k -tým členem číslo 1. Dokažte, že tato posloupnost není periodická. Počátek této posloupnosti je 1010101011010101001...

(Posloupnost se nazývá periodická, právě když existuje přirozené číslo d tak, že každé dva členy této posloupnosti, jejichž indexy se liší o d , jsou stejné.)

(4 BODY)

5. a) Dort má tvar tupouhlého trojúhelníku, v němž je velikost tupého úhlu dvakrát větší než velikost jednoho ze dvou jeho ostrých úhlů. Krabice má stejný tvar jako dort, je však souměrně sdružená podle některé přímky. Určete, jakým způsobem je potřeba rozřezat dort na dvě části, které je pak možno vložit (bez překrývání) do krabice.

(3 BODY)

- b) Řešte stejnou úlohu pro trojúhelníkový dort, v němž velikosti jeho vnitřních úhlů jsou 20° , 30° a 130° .

(3 BODY)

(Dort i krabici na dort považujte za rovinné útvary.)

28. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Uvažujme tzv. *uzavřenou jednotažku* složenou z pěti na sebe navazujících úseček ve tvaru pěticípé hvězdy, která je těmito pěti úsečkami rozdělena na pět trojúhelníků a jeden pětiúhelník. Všechny trojúhelníky tvořící jeho cípy jsou shodné. Rozhodněte, zda tento pětiúhelník je pravidelný.

(4 BODY)

2. Na tabuli jsou napsána dvě 2007-místná přirozená čísla. Pokud z každého čísla vyškrtneme sedm číslic tak, že obě (tímto způsobem) změněná čísla jsou stejná. Dokažte, že do (zápisu) daných čísel lze vepsat sedm číslic tak, že obě (tímto způsobem) změněná čísla jsou stejná.

(4 BODY)

3. Určete, jaký nejmenší počet věží lze rozmístit na klasické šachovnici 8×8 tak, že všechna bílá pole této šachovnice jsou použitými věžemi ohrožena. (Pole je ohroženo věží, leží-li na stejném řádku nebo sloupci šachovnice jako věž.)

(4 BODY)

4. Je dána trojice nenulových reálných čísel s vlastností: Jsou-li koeficientům a, b, c kvadratického trojčlenu $f(x) = ax^2 + bx + c$ přiřazena (v libovolném pořadí) daná tři reálná čísla, má každá z uvažovaných šesti kvadratických rovnic $f(x) = 0$ reálné kořeny. Rozhodněte, zda každá z těchto kvadratických rovnic má kladný kořen.

(4 BODY)

5. a) Dort má tvar trojúhelníku, v němž jeden z jeho vnitřních úhlů má velikost třikrát větší nežli velikost jiného vnitřního úhlu v tomto trojúhelníku. Krabice má stejný tvar jako dort, je však souměrně sdružená podle některé přímky. Určete, jakým způsobem je potřeba rozřezat dort na dvě části, které je pak možno vložit (bez překrývání) do krabice.

(1 BOD)

- b) Řešte stejnou úlohu pro dort ve tvaru tupouhlého trojúhelníku, ve kterém je velikost tupého úhlu dvakrát větší než velikost jednoho ze dvou ostrých úhlů.

(4 BODY)

(Dort i krabici na dort považujte za rovinné útvary.)