

29. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. Papírový trojúhelník, jehož jeden vnitřní úhel má velikost α , byl rozstřížen na několik trojúhelníků. Rozhodněte, zda všechny takto získané trojúhelníky mohou mít velikosti všech svých vnitřních úhlů menší než α

a) v případě, že $\alpha = 70^\circ$,
(3 BODY)

b) v případě, že $\alpha = 80^\circ$.
(3 BODY)

2. Na číselné ose v bodě P sedí „bodová“ luční kobylka. Body 0 a 1 jsou pasti. Před každým jejím skokem vlevo nebo vpravo (dle její volby) zvolíme kladné reálné číslo a kobylka se skokem přesune do jiného bodu vzdáleného od P o předem zvolenou vzdálenost. Určete, pro které body P je možno postupně zvolit kladná reálná čísla tak, abychom kobylku dostali do některé ze dvou pastí (nezávisle na její volbě směru skoku).

(6 BODŮ)

3. Rovnice $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je polynom stupně $n > 1$ s reálnými koeficienty, má n navzájem různých reálných kořenů $x_1, x_2, \dots, x_n$. Rovnice $P'(x) = 0$, kde $P'(x)$ je první derivace mnohočlenu $P(x)$, má reálné kořeny $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

(6 BODŮ)

4. Petr a Boris si narýsovali konvexní čtyřúhelníky, které nemají žádnou dvojici rovnoběžných stran. Každý z nich sestrojil ve svém čtyřúhelníku jednu z úhlopříček. Petr zjistil, že velikosti úhlů, které svírá tato úhlopříčka s jednotlivými stranami svého čtyřúhelníku, jsou v jistém pořadí α, α, β a γ . Boris zjistil, že velikosti úhlů, které svírá uvažovaná úhlopříčka se stranami v jeho čtyřúhelníku, jsou tytéž čtyři hodnoty, avšak zapsané v jiném pořadí. Dokažte, že úhly, které svírají úhlopříčky v Petrově i v Borisově čtyřúhelníku, jsou shodné.

(7 BODŮ)

5. V jednom řádku jsou v určitém pořadí napsána všechna přirozená čísla (každé právě jednou). Rozhodněte, zda (vždy) existuje jistý úsek tohoto řádku (obsahující aspoň dvě čísla) takový, že součet všech čísel tohoto úseku je prvočíslo.

(8 BODŮ)

6. Jedenácti mudrcům zavázali oči a každému z nich nasadili na hlavu čepičku jedné z 1000 barev. Pak jim oči rozbízáli a každý z nich uviděl, jaké čepičky mají na hlavách ostatní mudrci, kromě své. Každý z mudrců pak ve stejný okamžik ukázal všem ostatním jednu ze dvou karet (bílou nebo černou). Každý z mudrců měl nakonec ve stejném okamžiku uhádnout barvu své čepičky. Rozhodněte, zda se to mohlo podařit. (Mudrci se mohli ještě před zavázáním očí společně dohodnout na způsobu stanovení barev svých čepiček pomocí karet; každý z mudrců přitom zná, jakými 1000 barvami byly čepičky obarveny.)

(8 BODŮ)

7. V rovině jsou dány dvě kružnice a tři přímky. Každá z těchto přímek vytíná na obou kružnicích shodné tětivy. Průsečíky těchto přímek přitom tvoří vrcholy trojúhelníku. Dokažte, že kružnice jemu opsaná prochází středem středné obou kružnic.

(8 BODŮ)

29. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. Číslo N je součinem dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Dokažte, že
- a) k tomuto číslu lze zprava připsat dvě číslice (desítkové soustavy) tak, aby výsledné číslo bylo druhou mocninou některého přirozeného čísla
(2 BODY)
 - b) pro $N > 12$ je totéž možno učinit jediným způsobem.
(2 BODY)
2. Na stranách AB a BC trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K a M tak, že $KM \parallel AC$. Úsečky AM a KC se protínají v bodě O . Jestliže $|AK| = |AO|$ a současně $|KM| = |MC|$, pak platí $|AM| = |KB|$. Dokažte.
(5 BODŮ)
3. Je dána nekonečná páska (v obou směrech), jejíž šířka je totožná s velikostí jednoho jejího pole. Jistá dvě pole této pásy jsou pasti. Mezi nimi je N polí, z nichž na jednom sedí luční kobyłka. Zvolíme celé nezáporné číslo a kobyłka se skokem (dle své volby vlevo nebo vpravo) přesune do jiného pole na pásce; přeskochí přitom zvolený počet polí pásy. Určete, pro která N můžeme volit postupně čísla uvedeným způsobem tak, abychom kobyłku dostali do některé ze dvou pastí, a to nezávisle na počáteční pozici kobyłky a zvoleném směru každého jejího skoku.
(6 BODŮ)
4. Několik (konečně mnoho) bodů roviny je obarveno jednou ze čtyř barev, přičemž žádné tři z nich neleží na téže přímce. Dokažte, že existují tři různé trojúhelníky (mohou se protínat) s vlastností: vrcholy každého z nich jsou obarveny některými třemi různými barvami a uvnitř těchto tří trojúhelníků neleží žádný obarvený bod.
(6 BODŮ)
5. 99 dětí, z nichž každé má na počátku jeden míč, stojí na kružnici. Každou minutu pošle každé dítě, které má míč, svůj míč některému ze svých dvou sousedů. Pokud některé dítě obdrží současně dva míče, jeden z míčů se mu (nevratně) odebere. Určete, za jakou nejkratší dobu může dětem zůstat pouze jeden míč.
(7 BODŮ)
6. Rozhodněte, zda existují přirozená čísla a, b, c, d , pro něž platí
- $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1, \quad \frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008.$$
- (7 BODŮ)
7. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ nemá žádné dvě rovnoběžné strany. Úhly, které svírá úhlopříčka AC s jednotlivými stranami čtyřúhelníku, jsou v jistém pořadí 16° , 19° , 55° a 55° . Určete, jaké mohou být odchylky přímek AC a BD .
(8 BODŮ)