

29. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Na každém ze 100 obrázků je jeden dospělý člověk a jedno dítě (vždy výškově menší). Všechny 200 osob na obrázcích je navzájem různých. Z těchto obrázků chceme vytvořit jeden velký obraz. Každý z obrázků můžeme předtím n -krát zmenšit, přičemž n je kladné celé číslo (pro různé obrázky mohou být n různá). Dokažte, že tímto způsobem je možno dosáhnout toho, aby každý dospělý byl na společném obrázku vyšší než každé dítě.

(3 BODY)

2. Na listu papíru je napsáno číslo 1 a dvě kladná reálná čísla x a y . V každém kroku dále napíšeme na tento list dále buď součet, nebo rozdíl některých dvou čísel, které byly již na papíru napsány (je povoleno přitom uvažovat totéž číslo dvakrát), nebo převrácenou hodnotu některého z těchto čísel. Rozhodněte, zda tímto způsobem je možno po několika krocích na list papíru napsat

a) číslo x^2 ,

(2 BODY)

b) číslo xy .

(2 BODY)

3. V rovině je dána přímka a v jedné z polorovin vyřazených touto přímkou body A, B , které mají tutéž vzdálenost od dané přímky. Pomocí pravítka (bez měřítka) a kružítka sestrojte bod C dané přímky, pro který je hodnota součinu $|AC| \cdot |BC|$ co nejmenší.

(4 BODY)

4. Kouzelník, který má zavázané oči, nabídne divákovi 29 karet, na nichž jsou napsána čísla od 1 do 29. Divák uschová dvě z těchto karet. Asistent pak ukáže divákovi dvě ze zbývajících karet a divák sdělí kouzelníkovi čísla na obou těchto kartách (v libovolném pořadí). Poté kouzelník uhodne čísla na obou kartách, které divák uschoval. Jakým způsobem se musí dohodnout kouzelník se svým asistentem, aby kouzelník vždy mohl sdělit správná čísla na kartách, které divák uschoval?

(4 BODY)

5. Rozhodněte, zda je možno čtverec o straně 1 m rozřezat na tři konvexní mnohoúhelníky, jejichž *průměr* je roven nejvýše

a) 1 m;

(1 BOD)

b) 1,01 m;

(2 BODY)

c) 1,001 m.

(2 BODY)

(*Průměrem* mnohoúhelníku rozumíme největší vzdálenost mezi některými dvěma jeho vrcholy.)

29. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. Určete největší počet černých a bílých figurek, které je možno postavit na šachovnici 8×8 tak, aby v každém řádku a v každém sloupci bylo právě dvakrát více bílých figurek než černých. (Každá figurka je umístěna na právě jednom poli šachovnice.)
(3 BODY)
2. Na listu papíru je napsáno číslo 1 a číslo x , které není celé. V každém kroku dále napíšeme na tento list buď součet, nebo rozdíl některých dvou čísel na papíru již dříve napsaných (je povoleno přitom uvažovat totéž číslo dvakrát), nebo převrácenou hodnotu některého z dříve napsaných čísel. Rozhodněte, zda tímto způsobem je možno napsat po několika krocích na list papíru číslo x^2 .
(4 BODY)
3. Střed jedné ze stran a paty výšek ke zbylým dvěma stranám daného trojúhelníku tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Rozhodněte, zda daný trojúhelník musí být také rovnostranný.
(4 BODY)
4. Do tabulky 29×29 jsou vepsána čísla $1, 2, 3, \dots, 29$, každé právě 29-krát. Součet všech čísel napsaných nad *hlavní diagonálou* čtvercové tabulky je přitom třikrát větší než součet všech čísel pod její hlavní diagonálou. Určete, které číslo je napsáno uprostřed této čtvercové tabulky.
(*Hlavní diagonálou* rozumíme úhlopříčku čtvercové tabulky, která spojuje její levý horní vrchol s pravým dolním vrcholem.)
(5 BODŮ)
5. Kouzelník, který má zavázané oči, nabídne divákovi pět karet, na nichž jsou napsána čísla od 1 do 5. Divák uschová dvě z těchto pěti karet. Asistent kouzelníka pak ukáže divákovi dvě ze zbývajících tří karet a divák sdělí kouzelníkovi čísla na obou těchto kartách (v libovolném pořadí). Poté kouzelník uhádne čísla na obou kartách, které divák uschoval. Jakým způsobem se musí dohodnout kouzelník se svým asistentem, aby kouzelník mohl vždy sdělit správná čísla na kartách, které divák uschoval?
(5 BODŮ)