

31. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. 2010 lodí veze banány, citróny a ananasy. Počet banánů na každé lodi je roven počtu citrónů na všech ostatních lodích dohromady a počet citrónů na každé lodi je roven počtu ananasů na všech ostatních lodích dohromady. Dokažte, že počet všech dovážených kusů ovoce je dělitelný číslem 31.
(3 BODY)
2. Funkce $f(x)$ s reálnou proměnnou x má následující vlastnosti: Libovolná přímka má s grafem funkce $f(x)$ v souřadnicovém systému $0xy$ stejný počet průsečíků jako s parabolou $y = x^2$. Dokažte, že platí $f(x) = x^2$.
(4 BODY)
3. Rozhodněte, zda povrch pravidelného osmistěnu lze pokrýt (bez překrývání) několika pravidelnými šestiúhelníky. (Povrch pravidelného osmistěnu tvoří osm shodných rovnostranných trojúhelníků, přičemž z každého z jeho šesti vrcholů vychází právě čtyři hrany.)
(5 BODŮ)
4. Baron Prášil chtěl, aby si někdo myslel určitý nekonstantní mnohočlen $P(x)$ s kladnými celočíselnými koeficienty a pak mu sdělil hodnoty $P(2)$ a $P(P(2))$. Tvrdil, že na základě znalosti obou těchto hodnot dokáže vždy takový mnohočlen stanovit. Rozhodněte, zda měl Baron Prášil pravdu.
(5 BODŮ)
5. V rovině leží jehla. Tuto jehlu můžeme v rovině otočit o 45° v libovolném směru, přičemž středem otočení je libovolný její krajní bod. Rozhodněte, zda po několika takových otočeních je možno dosáhnout toho, aby jehla ležela na stejném místě jako na počátku, a přitom aby její krajní body byly zaměněny.
(6 BODŮ)

31. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. V šesti ošatkách jsou hrušky, švestky a jablka. Počet švestek v každé ošatce je roven počtu jablek ve všech ostatních ošatkách, počet jablek v každé ošatce je roven počtu hrušek ve všech ostatních ošatkách. Dokažte, že počet všech kusů ovoce ve všech ošatkách je dělitelný číslem 31.

(3 BODY)

2. Karel a Libor si dělí čtvercový koláč následujícím způsobem: Karel vybere bod uvnitř koláče (nikoliv na jeho straně). Libor pak vede přímý řez (libovolným směrem) od vybraného bodu k okraji koláče. Potom Karel vede druhý přímý řez od vybraného bodu k okraji koláče kolmo ke směru prvního řezu. Menší ze dvou dílů, na něž je koláč rozřezán, dostane Libor. Libor chce získat alespoň čtvrtinu koláče. Rozhodněte, zda mu v tom Karel může zabránit.

(3 BODY)

3. V rovině je dán úhel.

- a) Určete nejmenší počet kružnic, které je třeba sestrojít, abychom zjistili, že daný úhel je ostrý.

(2 BODY)

- b) Určete, jakým způsobem ověříme, zda daný úhel má velikost 31° (můžete přitom použít libovolný počet kružnic).

(2 BODY)

K řešení úloh a) i b) lze použít pouze kružítko!

4. V matematické soutěži má každý ze soutěžících mezi ostatními alespoň tři přátele. Dokažte, že lze vybrat sudý počet účastníků soutěže (více než dva) a rozesadit je kolem kulatého stolu tak, aby každý soutěžící seděl vedle dvou svých přátel.

(5 BODŮ)

5. Na tabuli je napsáno 101 přirozených čísel $1^2, 2^2, \dots, 101^2$. V každém kroku vybereme dvě čísla napsaná na tabuli, smažeme je a napíšeme absolutní hodnotu jejich rozdílu. Určete nejmenší číslo, které se na tabuli může objevit po 100 krocích.

(5 BODŮ)