# 31. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
## (Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

**1.** Rozhodněte, zda lze všechny přímky v rovině rozdělit do dvojic navzájem kolmých přímek tak, aby každý přímka patřila právě do jedné takové dvojice přímek.
(3 BODY)

**2.** Na stole leží kus sýra. V jednom kroku můžeme vybrat libovolný kus sýra a rozřezat ho v poměru hmotností $1 : a$, kde $a$ je předem zvolené kladné iracionální číslo. V dalším kroku můžeme některý z kusů sýra na stole opět rozřezat v poměru hmotností $1 : a$, atd.

a) Rozhodněte, zda po konečném počtu kroků lze z všech kousků sýra na stole vytvořit dvě hromádky téže hmotnosti.
(2 BODY)

b) Řešte stejnou úlohu pro kladné racionální číslo $a \neq 1$.
(2 BODY)

**3.** Rozhodněte, zda je možno získat číslo 2010 opakovaným použitím funkcí sin, cos, tg , cotg , arcsin, arccos, arctg , arccotg vzhledem k argumentu 1. (Každá z těchto funkcí může být použita libovolněkrát, např. „sin cos arcsin cos sin“.)
(6 BODŮ)

**4.** Na festival se sjelo 5000 filmových kritiků, z nichž každý zhlédl aspoň 1 film. Na konci byli rozděleni do několika sekcí dvou typů. Ve každé sekci prvního typu jsou ti, kteří zhlédli stejný film, a v každé skupině druhého typu jsou filmoví kritici, z nichž vždy právě jeden viděl některý z promítaných filmů. Dokažte, že všechny kritiky lze rozdělit právě do 100 sekcí. (Sekce může být tvořena jedním kritikem.)
(6 BODŮ)

**5.** Po kruhové dráze proti směru hodinových ručiček běží třiatřicet běžců. Na této dráze přitom existuje právě jeden bod, v němž se mohou běžci vzájemně předběhout (v jiném bodě dráhy nelze běžce předběhnout). Rozhodněte, zda běžci mohou běhat po dráze neomezeně dlouho, běží-li *konstatními, navzájem různými rychlostmi.*
(7 BODŮ)

**6.** Nechť $I$ je střed kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCD$. Označme $M$ a $N$ po řadě středy jeho stran $AB$ a $CD$, přičemž platí $|IM| / |AB| = |IN| / |CD|$. Dokažte, že $ABCD$ je lichoběžník nebo rovnoběžník.
(8 BODŮ)

**7.** Je dáno přirozené číslo. V jednom kroku můžeme mezi některé číslice daného čísla vložit znaménka „+“ a stanovit vzniklý součet. Např. z čísla 123456789 můžeme tímto způsobem získat součet $12345+6+789 = 13140$. S takto získaným číslem (součtem) lze provést podobnou operaci, atd. Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla lze pomocí nejvýše deseti kroků získat jednomístné číslo.
(9 BODŮ)

31. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

**1.** Na stole leží kus sýra. V jednom kroku můžeme vybrat libovolný kus sýra a rozřezat ho v poměru hmotností $1 : a$, kde $a$ ($a \neq 1$) je předem zvolené kladné reálné číslo . V dalším kroku můžeme některý z kusů sýra na stole opět rozřezat v poměru hmotností $1 : a$, atd. Rozhodněte, zda můžeme po několika krocích ze všech kousků sýra, které leží na stole, vytvořit dvě hromádky se stejnou hmotností.

(3 BODY)

**2.** Bod $M$ je středem strany $AC$ trojúhelníku $ABC$ a bod $P$ leží na jeho straně $BC$. Pro průsečík $O$ úseček $AP$ a $BM$ platí $|BO| = |BP|$. Určete poměr $|OM| : |PC|$.

(4 BODY)

**3.** Na kružnici je umístěno 999 čísel, z nichž každé je rovno buď $+1$, nebo $-1$, přitom všechna čísla nejsou stejná. Dále vypočteme všechny součiny každých deseti po sobě (na kružnici) následujících čísel a všech těchto 999 součinů sečteme.

a) Určete nejmenší možnou hodnotu tohoto součtu.

(3 BODY)

b) Určete největší možnou hodnotu tohoto součtu.

(3 BODY)

**4.** Součet všech číslic přirozeného čísla $n$ zapsaného v desítkové soustavě je 100. Může být součet všech číslic čísla $n^3$ roven $100^3$?

(6 BODŮ)

**5.** Po kruhové dráze proti směru hodinových ručiček běží tři běžci. Na této dráze přitom existuje právě jeden bod, v němž se běžci mohou vzájemně předběhout (v jiném bodě dráhy nemohou běžci předbíhat).

a) Mohou se tito tři běžci pohybovat po dráze libovolně dlouho *konstantními, navzájem různými rychlostmi*?

(3 BODY)

b) Může se tímto způsobem po téže dráze pohybovat deset běžců?

(5 BODŮ)

**6.** V rovině je dána neuzavřená lomená čára, která má 31 stran, přičemž žádné dvě sousední strany neleží na téže přímce a tato lomená čára se v žádném svém bodě sama neprotíná. Sestrojíme všechny přímky, na nichž leží některá ze stran lomené čáry. Dostaneme tak 31 přímek, přitom některé mohou být totožné. Najděte nejmenší možný počet takto uvažovaných, navzájem různých přímek.

(8 BODŮ)

**7.** Na některých polích šachovnice $10 \times 10$ sedí blechy. Dvě pole šachovnice nazveme sousední, mají-li společnou právě jednu stranu. Každou minutu přeskočí všechny blechy současně na sousední pole. Každá blecha se přitom stále pohybuje jedním směrem (rovnoběžným se stranami šachovnice) tak dlouho, dokud by nevyskočila ven ze šachovnice; v takovém případě se směr jejího pohybu změní v opačný. Maxipes Fík blechy pozorně sledoval a zjistil, že v průběhu jedné hodiny se na žádném poli šachovnice současně nenacházela více než jedna blecha. Určete největší možný počet blech, které takto mohly na šachovnici skákat.

(11 BODŮ)