

31. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. 100 pirátů hraje karty o zlato (zlatý prach). Po skončení hry si každý z nich spočítá, kolik celkově vyhrál, resp. kolik prohrál. Každý z pirátů má u sebe dostatek zlata, aby mohl zaplatit svou prohru. Během jedné platby buď každý pirát vyplatí všem hráčům stejné množství zlata, nebo od každého z pirátů dostane také stejné množství zlata. Dokažte, že po provedení několika takových plateb může každý z hráčů, obdržet celou svou výhru, popř. vyplatit celou svou prohru. (Množství zlata odpovídající všem výhrám je rovno množství zlata, které odpovídá všem prohrám.)

(4 BODY)

2. Obdélník je rozřezán na n pravoúhelníkových částí (nikoliv nutně shodných). Dokažte, že každou z těchto n částí je možno rozřezat na dvě části tak, že z n takto vzniklých částí je možno sestavit čtverec a ze zbývajících n částí je možno sestavit pravoúhelník.

(6 BODŮ)

3. Kulová plocha se dotýká všech hran čtyřstěnu. Dokažte, že tři přímky spojující dotykové body kulové plochy ležící na protilehlých hranách čtyřstěnu procházejí společným bodem.

(7 BODŮ)

4. Symbolem $[n]!$ označme součin $1 \cdot 11 \cdot \dots \cdot \underbrace{11 \cdot \dots \cdot 11}_{n\text{-krát}}$ (celkem n činitelů). Dokažte, že číslo $[n + m]!$ je dělitelné součinem $[n]! \cdot [m]!$.

(9 BODŮ)

5. Nechť XYZ je trojúhelník a $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, jehož strany AB , CD a EF jsou rovnoběžné a shodné po řadě s úsečkami XY , YZ a ZX . Dokažte, že obsah trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy úseček BC , DE a FA není menší než obsah trojúhelníku XYZ .

(9 BODŮ)

6. Adéla a Bořek jedou společně na výlet do země 2009 ostrovů. Některé dvojice ostrovů jsou spojeny obousměrnou lodní dopravou. Cestou hrají následující hru. Adéla nejprve vybere ostrov, z něhož začnou cestovat. Potom pokračují tak, že střídavě vybírají plavbu na ostrov, na němž ještě nebyli. Bořek vybírá první. Prohrává ten, kdo již nemůže zvolit plavbu na další ostrov. Dokažte, že pro jakoukoliv lodní síť mezi těmito ostrovy může vyhrát Adéla (nezávisle na volbách Bořka).

(12 BODŮ)

7. Vstup do jeskyně je uzavřen vodorovnou kruhovou deskou, která se může otáčet. Na jejím okraji je umístěno N vzhledově stejných uzavřených soudků tak, že každé dva sousední soudky jsou od sebe stejně vzdáleny. V každém z nich je ryba otočená buď hlavou dolů, nebo hlavou nahoru. V jednom kroku Ali Baba zvolí libovolně několik soudků (od 1 po N) a otočí je na desce dnem vzhůru; pak se deska roztočí. Jakmile se zastaví, Ali Baba nepozná, které ze soudků otočil v předchozím kroku. Jeskyně se otevře, jsou-li ryby ve všech soudcích otočeny stejným směrem (všechny hlavou nahoru nebo všechny hlavou dolů). Určete, pro která N může Ali Baba po konečném počtu kroků otevřít vchod do jeskyně.

(14 BODŮ)

31. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. V každé z deseti stejných sklenic je mléko (nikoliv stejné množství), které zaujímá nejvýše 10 % objemu sklenice. V jednom kroku můžeme vybrat libovolnou sklenici a odlít z ní stejné množství mléka do každé ze zbývajících devíti sklenic. Dokažte, že nejvýše po deseti krocích můžeme dosáhnout toho, že v každé sklenici je stejné množství mléka.
(4 BODY)
2. Michal má 1 000 shodných krychlíček. Každá krychlička má jednu dvojici protilehlých stěn obarvenou červeně, druhou modře a třetí zeleně. Michal z těchto krychlíček složil velkou krychli $10 \times 10 \times 10$ tak, že se krychličky dotýkají stejně obarvenými stěnami. Dokažte, že velká krychle má alespoň jednu celou stěnu obarvenou stejnou barvou.
(6 BODŮ)
3. Určete všechny dvojice kladných celých čísel a, b takové, že číslo $(a^2 + b)(a + b^2)$ je rovno číslu 2^m pro vhodné přirozené číslo m .
(6 BODŮ)
4. Na stranách BC a CD kosočtverce $ABCD$ jsou zvoleny po řadě body P a Q tak, že $|BP| = |CQ|$. Ukažte, že těžiště trojúhelníku APQ leží na úsečce BD .
(6 BODŮ)
5. Ze sady závaží o hmotnostech 1 g, 2 g, 3 g, ..., N g je třeba vybrat několik (více než jedno) závaží s celkovou hmotností rovnou průměrné hmotnosti zbývajících závaží. Dokažte, že
 - a) to lze učinit, je-li $N + 1$ je druhou mocninou přirozeného čísla,
(2 BODY)
 - b) pokud to lze učinit, je $N + 1$ je druhou mocninou přirozeného čísla.
(7 BODŮ)
6. Na nekonečnou čtvercovou síť je položeno 2009 shodných čtverců tak, že jejich strany leží na přímkách sítě (čtverce se mohou překrývat). Každé pole sítě, které je pokryto lichým počtem čtverců, je označeno. Dokažte, že počet označených polí sítě není menší než počet polí této sítě pokrytých jedním čtvercem.
(10 BODŮ)
7. Adéla a Bořek jedou společně na výlet do země 2009 ostrovů. Některé dvojice ostrovů jsou spojeny obousměrnou lodní dopravou. Cestou hrají následující hru. Adéla nejprve vybere ostrov, z něhož začnou cestovat. Potom pokračují tak, že střídavě vybírají plavbu na ostrov, na němž ještě nebyli. Bořek vybírá první. Prohrává ten, kdo již nemůže zvolit plavbu na další ostrov. Dokažte, že pro jakoukoliv lodní síť mezi těmito ostrovy může vyhrát Adéla (nezávisle na volbách Bořka).
(14 BODŮ)