

33. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. Petr označil několik bodů v rovině, jejichž vzdálenosti jsou navzájem různé. Dvojice zvolených bodů A, B se nazývá *neobvyklou*, jestliže A je nejvzdálenější označený bod od B a současně B je nejbližším označeným bodem od A (různý od A). Určete, jaký největší možný počet neobvyklých dvojic bodů mohl Petr získat. (4 BODY)

2. Pro reálná čísla a, b, c, d platí $0 < a, b, c, d < 1$ a $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Dokažte, že platí nerovnost

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

(4 BODY)

3. Nechť A_1, B_1, C_1 jsou paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C trojúhelníku ABC a C_A, C_B jsou paty kolmic z bodu C_1 po řadě k přímkám AC, BC . Dokažte, že přímka $C_A C_B$ prochází středy úseček $C_1 A_1$ a $C_1 B_1$.

(5 BODŮ)

4. Rozhodněte, zda existuje konvexní n -úhelník se shodnými stranami, jehož všechny vrcholy leží na parabole $y = x^2$. Úlohu řešte pro

$$\text{a) } n = 2011 \quad (3 \text{ BODY}); \quad \text{b) } n = 2012 \quad (4 \text{ BODY}).$$

5. Přirozené číslo nazveme *dobré*, jsou-li všechny jeho číslice nenulové. Dobré číslo nazveme *zvláštním*, má-li jeho zápis v desítkové soustavě aspoň k číslic a jeho číslice tvoří rostoucí posloupnost (zleva doprava). Je dáno nějaké dobré číslo. V jednom kroku je povoleno buď připsat na počátek nebo na konec zápisu daného čísla, nebo vepsat mezi libovolné dvě číslice tohoto čísla nějaké zvláštní číslo, popř. naopak je povoleno smazat v zápise daného čísla libovolné zvláštní číslo. Určete, pro jaké největší k je možno pomocí těchto kroků získat z libovolného *dobrého* čísla jiné (dané) *dobré* číslo.

(7 BODŮ)

6. Dokažte, že přirozené číslo $1^1 + 3^3 + 5^5 + \dots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ je násobkem 2^n , avšak není násobkem 2^{n+1} .

(7 BODŮ)

7. 100 červených bodů dělí modrou kružnici na 100 kružnicových oblouků tak, že jejich délky jsou přirozená čísla od 1 do 100 v libovolném pořadí. Dokažte, že existují dvě navzájem kolmé tětivy, jejichž krajní body jsou červené.

(9 BODŮ)

33. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. Saša píše na tabuli posloupnost přirozených čísel. Nejdříve napíše přirozené číslo $N > 1$. Další přirozená čísla získá tak, že od posledního zapsaného čísla odečte nebo k němu přičte jeho libovolný dělitel větší než 1. Rozhodněte, zda Saša může pro libovolné přirozené číslo $N > 1$ po několika krocích napsat na tabuli číslo 2011.

(3 BODY)

2. Na straně AB trojúhelníku ABC je zvolen bod P tak, že $|AP| = 2|BP|$ a na straně AC její střed Q . Víme, že platí $|CP| = 2|PQ|$. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.

(4 BODY)

3. Máme sadu závaží s navzájem různými hmotnostmi. Víme, že když položíme na levou misku rovnoramenných vah libovolnou dvojici závaží, potom můžeme váhy vyrovnat položením jednoho nebo několika ze zbývajících závaží na pravou misku. Určete nejmenší možný počet závaží takové sady.

(5 BODŮ)

4. Je dána hrací deska s 2012 řádky a $k > 2$ sloupci. Na některém poli jejího levého krajního sloupce leží kámen. Dva hráči střídavě táhnou tímto kamenem. V každém tahu může hráč posunout kámen o jedno pole buď vpravo, nebo nahoru, nebo dolů, nesmí přitom umístit kámen na pole, na němž už dříve stál. Hra končí v případě, že některý z hráčů umístí kámen na některé pole pravého krajního sloupce. O tom, zda tento tah bude „vítězný“ nebo naopak, se hráči dovedí až v okamžiku, kdy se kámen octne v předposledním sloupci (zprava). Může některý z hráčů hrát tak, aby vyhrál nezávisle na tazích druhého hráče?

(6 BODŮ)

5. Pro reálná čísla a, b, c, d platí $0 < a, b, c, d < 1$ a $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Dokažte, že platí nerovnost

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

(6 BODŮ)

6. Po přímé cestě jede stálou rychlostí 60 km/h automobil. Nedaleko od cesty je postaven s ní rovnoběžně plot délky 100 m. Každou vteřinu měří cestující v automobilu úhel, pod kterým je celý plot vidět. Dokažte, že součet všech úhlů naměřených cestujícím je menší než 1 100 stupňů.

(7 BODŮ)

7. Vrcholy pravidelného 45úhelníku jsou obarveny třemi barvami tak, že počty shodně obarvených vrcholů jsou stejné. Ukažte, že vždy můžeme vybrat po třech vrcholech každé z barev tak, aby trojúhelníky tvořené vrcholy stejné barvy byly shodné.

(9 BODŮ)